Р. В. ГАНГНУС и Ю. О. ГУРВИЦ

ГЕОМЕТРИЯ

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ ВЫСШИХ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ
УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
И ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Планиметрия

Цена 4 р., переплет 25 к.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА — 1934

Р. В. ГАНГНУС и Ю. О. ГУРВИЦ

ГЕОМЕТРИЯ

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ ВЫСШИХ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ
УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
И ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

Планиметрия

Под редакцией
проф. И. К. АНДРОНОВА

ДОПУЩЕНО НАРКОМПРОСОМ РСФСР

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА — 1934

Ответств. редактор *С. Ю. Калецкий.*
Техн. редактор *И. И. Кутин.*

Сдано в набор 22/VII 1934 г. Подписано к печати 10/X 1934 г.
Формат бумаги 62 × 94/16. Бумага фабрики „Сокол". Тираж 50 000 экз.
Изд. листов 20. Бум. листов 10. Авт листов 27,05. В 1 бум. листе 109 000 печ зн

У-7. Учпедгиз № 6260 Заказ № 3540.
Уполн. Главлита № Б-39823.

1-я Образцовая тип. Огиза РСФСР треста „Полиграфкнига", Москва, Валовая, 28.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Настоящая книга ставит своей задачей оказать посильную помощь в деле постановки преподавания геометрии преподавателю средней школы, а также слушателям педагогических институтов, изучающим методику геометрии и ведущим практические заиятия в школе.

Авторы отнюдь не пытались исчерпать в данной книге с надлежащей полнотой научного изложения всех вопросов как общей, так и частной методики.

Да это было и невозможно, принимая во внимание краткость срока, который мог быть использован авторами для написания этой книги.

В силу этого авторы сознательно уделили мало внимания вопросам общей методики, заострив главным образом внимание на вопросах частной методики, а особенно на решении задач на построение, чему, к сожалению, при занятиях геометрией в школе не отводилось до настоящего времени должного места.

Материал книги в отдельных своих частях выходит за пределы программы средней школы; всегда он должен быть проработан преподавателем, ибо преподаватель не может ограничиваться только рамками того учебника, по которому ведется работа в школе.

При написании книги была использована помимо методической литературы по геометрии на русском языке также и иностранная методическая литература, перечень которой приводится в книге.

Авторы считают своим долгом выразить глубокую признательность проф. И. К. Андронову за ценные и полезные указания при написании книги и выполненное редактирование книги.

Р. В. Гангнус и Ю. О. Гурвиц

Сентябрь 1934 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

I. Некоторые вопросы общей методики геометрии.

II. Вопросы частной методики геометрии.

I. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОБЩЕЙ МЕТОДИКИ ГЕОМЕТРИИ.

§ 1. Возникновение геометрии и „Начала" Евклида.

1. Геометрия, как и всякая наука, возникла под влиянием жизненных потребностей. Необходимость повседневного удовлетворения своих потребностей ставит человека перед целым рядом вопросов о форме окружающих его предметов, о вычислениях, связанных с землемерием, строительным делом и т. п. Слово „геометрия" означает „землемерие" и ясно указывает источник его происхождения.

Имеются вполне достоверные сведения о довольно значительном развитии геометрических знаний в Египте более чем за 2 тысячи лет до начала нашей эры.

Узкая плодородная полоса земли между пустыней и рекой Нилом в древнем Египте ежегодно подвергалась затоплению, и каждый разлив реки смывал границы участков, принадлежавших отдельным лицам. После спада воды требовалось с возможно большей точностью водворять каждое лицо на принадлежавший ему участок, ибо каждый квадратный метр плодородной земли ценился весьма высоко. Это повелительно требовало заняться вопросами измерения земельных участков, т. е. землемерием — геометрией. Помимо этого египтяне, ведя развитую торговлю, нуждались в умении измерять емкость сосудов; нуждались они также в астрономических сведениях, на которых основывалось искусство кораблевождения.

Выдающиеся постройки египтян — пирамиды, которые сохранились до настоящего времени, свидетельствуют, что их сооружения требовали большого знания пространственных форм.

Все это указывает на чисто опытное происхождение геометрии. Однако надо помнить, что не один только опыт содействовал развитию геометрии; размышления человека над отдельными явлениями, способность человека отвлечься от реального образа и мыслить абстрактно, создавать в своем воображении различные образы, воспроизводить их, размышлять над ними, сопоставлять результаты наблюдений над теми или другими образами, а также обобщать результаты накопленного и проверенного опыта в должной мере способствовали и способствуют развитию геометрии как науки.

Путем проб, через ряд ошибок и последующих их исправлений человек постепенно доходил до правильного решения геометрических проблем, настоятельно выдвигаемых жизненной необходимостью. Так, площадь равнобедренного треугольника в некоторых случаях первоначально оши-

бочно определяли как половину произведения боковой стороны и основания. Это ошибочное решение давало хорошее приближение, если углы при основании равнобедренного треугольника мало отличались от прямого угла.

Такое правило для измерения площадей передавалось из поколения в поколение; насколько живуче это правило, несмотря на его ошибочность, показывает тот факт, что и у нас, в глухих деревнях, еще до последнего времени пользовались им при обмере клиновидных полей.

По свидетельству Геродота, греческого историка, жившего за 25 столетий до нашего времени, „Сезострис, египетский царь, произвел деление земель, отмежевав каждому египтянину участок по жребию; сообразно этим участкам с их владельцев ежегодно взимали налоги.

Если Нил заливал чей-либо участок, то пострадавший обращался к царю и докладывал ему о случившемся. Тогда царь посылал землемеров (геометров); они измеряли, насколько уменьшился участок, и сообразно этому понижали налог. Вот откуда возникла геометрия и перешла из этой страны в Грецию".

Древнеегипетскую культуру в области математики продолжали греки, которые не только преемственно усвоили себе весь опыт египетской геометрии, но и пошли гораздо дальше египтян; они сумели привести в систему накопленные геометрические знания и таким образом заложить начало геометрии как науки.

Попытку создания такой системы геометрических знаний мы видим в Древней Греции на протяжении V и IV вв. до нашей эры.

„Начала".

2. Первое собрание решений наиболее простых геометрических задач и предложений под названием „Начал", о котором дошли до нас сведения, было составлено Гиппократом (в V в. до нашей эры). Дальнейшие успехи геометрии потребовали создания нового, более обширного сборника „Начал", составление которого приписывают Леону. Наконец, последними из „Начал", достигшими всеобщего признания и дошедшими до нас, были „Начала" Евклида, жившего в александрийский период греческой истории, в III в. до нашей эры.

Две тысячи лет этот замечательный документ человеческого знания считался непревзойденным образцом изложения систематического курса элементарной геометрии.

Спрашивается, в чем заключается основная особенность системы знаний, данной Евклидом в его „Началах"?

Все предложения Евклид доказывает чисто умозрительно, исходя из принятых им основных определений, постулатов и аксиом, без всякой ссылки на опыт, лишь с помощью цепи логических умозаключений, выводимых одно из другого.

Если проследить за доказательством любой теоремы евклидовых „Начал", то увидим, что оно опирается на предложение, доказанное в одной из предыдущих теорем; последнее, в свою очередь, основывается на предложениях, доказанных еще ранее, и т. д., и так до тех пор, пока мы не дойдем до начальных предложений и определений, которые являются первым звеном в цепи логических умозаключений, истинность которых в математике доказать нельзя, ибо нет предложений еще более простых, на которые они могли бы опираться. Эти предложения выражают основные свойства пространственных образов

§ 2. Определения, аксиомы и теоремы.

1. Всякое предложение, раскрывающее содержание какого-либо понятия или сводящее сложное понятие к более простым и первоначальным, называется определением. Считается, что понятие определено правильно, если в определении указано ближайшее родовое понятие и перечислены существенные видовые отличия.

Определение основных понятий геометрии приписывают Платону (429—348 гг. до нашей эры); часть их вошла в число определений, которыми Евклид начинает первую книгу своих „Начал".

Предложения, принимаемые без доказательства и служащие основой всей системы последующих доказательств, называются аксиомами. Все остальные предложения, которые доказываются с помощью аксиом, называются теоремами. Необходимо подчеркнуть, что аксиомы отражают основные свойства пространственных форм и в математике не могут быть доказаны.

Для доказательства справедливости аксиом, — такова мысль Энгельса, — мы должны выйти из сферы умозрения и обратиться к опыту; там мы найдем прямое подтверждение их истинности. Аксиомы, таким образом, „доказаны" многовековым опытом человечества. Система развития науки от аксиом к теоремам называется дедуктивной системой.

Всякое предложение в логическом курсе геометрии должно быть или поставлено как определение, или внесено в число аксиом, или доказано с помощью определений, аксиом и предшествующих теорем; всякое понятие должно быть или поставлено в числе основных или определено с помощью их.

Основные понятия: точка, прямая и плоскость — понятия, отвлеченные от реальных объектов окружающей действительности; они являются абстрагированными, идеализированными пространственными образами.

Энгельс в своем „Анти-Дюринге" говорит: „Понятие фигуры, как и понятие числа, заимствовано исключительно из внешнего мира, а не возникло вовсе в голове из чистого мышления. Раньше, чем люди могли притти к понятию фигуры, должны были существовать вещи, имеющие форму и формы которых сравнивали. Чистая математика имеет своим предметом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, т. е. весьма реальное содержание" (Энгельс, Анти-Дюринг, изд. 5-е, 1931 г., стр. 33).

„Чтобы изучить пространственные формы и количественные отношения в их чистом виде, — говорит Энгельс, — следует оторвать их совершенно от их содержания, устранить его как нечто безразличное для дела" (там же).

Именно благодаря своему абстрактному характеру геометрия обладает той общностью, которая позволяет применять ее к широкому кругу явлений.

Законы построения геометрических форм, несмотря на их абстрактный характер, можно применять к изучению форм реальных объектов именно потому, что они были первоначально получены путем абстракции из действительного мира.

Созданием абстрактных геометрических понятий мы диалектически отрицаем реальные формы, а потом, по закону отрицания отрицания,

вновь, обогащенные теорией, возвращаемся к практике и на практике поверяем сделанные в теоретическом исследовании выводы.

„От живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике — таков диалектический путь познания истины, познания объективной реальности",— говорит Ленин (Ленинский сборник, т. IX).

Определения и их формулировка.

2. Преподаватель не может не знать, какое значение имеет определение в курсе геометрии и насколько правильная и четкая формулировка определения какого-либо понятия представляет весьма часто большие трудности для учащегося. Каждое определение должно быть: 1) ясным и законченным, 2) кратким по форме и в то же время полным по содержанию; в нем не должно быть ничего лишнего и в то же время должно быть все, что необходимо для понимания определяемого понятия. Сказанное относится в полной мере и к формулировкам аксиом, теорем, следствий из них и т. п.

Рассмотрим определение ромба: *ромб есть равносторонний параллелограм.* В данном случае параллелограм — более широкое, родовое понятие, слово же „равносторонний" — видовой признак, выделяющий ромб из числа всех неравносторонних параллелограмов, ромб — понятие, соподчиненное понятию параллелограма. Можно было бы исходить при определении ромба и из более широкого понятия, каковым является понятие „четырехугольник"; тогда определение будет таковым: *ромб — равносторонний четырехугольник.*

Заметим, что наиболее точным определением ромба было бы следующее: *ромбом называется параллелограм, две смежные стороны которого равны*, так как из этого определения в силу свойств параллелограма вытекает равенство всех сторон рассматриваемой фигуры — ромба.

Однако определение: *ромб есть равносторонний параллелограм*, хотя и содержит лишнее условие, на первых порах более приемлемо для учащихся, так как оно кратко по форме, а главное — не вызывает у учащихся представления о неравенстве двух других смежных или несмежных сторон, невольно возникающего при определении ромба как параллелограма, две смежные стороны которого равны.

Ясно, что учащиеся в начале своих занятий по геометрии не могут давать „строгих" формулировок определений, однако необходимо к этому постепенно их подводить и приучать. Научить учащихся давать строгие определения — прекрасная школа критического и серьезного отношения к каждому высказыванию; при этом надо помнить, что не всегда следует давать определения догматически, необходимо по возможности подводить учащихся к определениям путем всесторонней предварительной проработки вопроса. Так, к различным видам четырехугольников, а следовательно и к определениям их, следует подвести учащихся, используя шарнирную модель четырехугольника с раздвижными сторонами, при помощи которой четырехугольник произвольного вида может быть преобразован сперва в трапецию, затем в параллелограм, ромб, прямоугольник и, наконец, в квадрат.

Упражнения в формулировке определений должны составлять неотъемлемую часть преподавания. Одно и то же понятие может быть определено различно. Так: *диаметр есть хорда, проходящая через центр окружности*, или *диаметр есть отрезок, проходящий через центр, и его концами служат две точки окружности.* В первом определении исход

ным понятием служит „хорда“, во втором — более общее понятие „отрезок“. На подобном примере следует показать учащимся, что нецелесообразно исходить из более общего понятия, каким является понятие „отрезок“, так как использование этого понятия ведет к более пространному определению, чем если использовать для определения диаметра понятие о хорде. Точно так же лучше определить квадрат как равносторонний прямоугольник, нежели как четырехугольник, у которого все стороны и все углы равны. Последней формулировкой обычно пользуются в пропедевтическом курсе геометрии.

Относительно определения: *квадрат — равносторонний прямоугольник* — можно сделать то же замечание, какое было сделано выше при определении ромба. Строгое определение квадрата гласит: *квадратом называется прямоугольник, смежные стороны которого равны.*

Само собою разумеется, что при определении нового понятия следует всегда исходить из понятия, уже осознанного учащимися. Этим объясняется, что определение понятия „параллелограма“ базируется не на более близком понятии „трапеция“, а на понятии „четырехугольника“, между тем как определение: *параллелограм — трапеция, боковые стороны которой параллельны* — более простое, чем обычное определение параллелограма.

Остановимся еще на разборе некоторых определений. Определение: *вписанным называется четырехугольник, вершины которого лежат на окружности*, наводит учащихся, как показывает опыт работы, на мысль о том, что наличие окружности обязательно, чтобы считать четырехугольник вписанным; необходимо поэтому разъяснить учащимся, что четырехугольник считается вписанным, если он удовлетворяет определенным условиям, и что наличие окружности не является обязательным. Так, известно, что четырехугольники, противолежащие углы которых пополнительны, т. е. в сумме дают $2d$, — четырехугольники вписанные: через их вершины можно провести окружность; к числу таких четырехугольников относятся прямоугольник, квадрат и равнобедренная трапеция. Отсюда определение: *вписанным называется четырехугольник, через все вершины которого можно провести окружность.*

Определение: „параллелограм есть фигура, имеющая четыре стороны“, — определение неверное: оно не содержит видового признака.

Определение: „параллелограм — четырехугольник, противолежащие стороны которого попарно параллельны и равны“, страдает тем, что содержит лишние данные, так как равенство противолежащих сторон вытекает из условия, что противолежащие стороны четырехугольника попарно параллельны.

A D C B

Рис. 1.

Преподаватель должен указать учащимся, что под четырехугольником следует всегда иметь в виду п л о с к и й четырехугольник, так как существует четырехугольник, который не помещается в одной плоскости (рис. 1), а потому следует дать такое определение четырехугольника: *четырехугольником называется часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной линией, состоящей из четырех звеньев.*

Определение: „равнобедренным треугольником называется треугольник, у которого две стороны равны“, хотя и верно, но может вызвать у учащихся сомнение, можно ли назвать равнобедренным треугольник, у которого три стороны равны, т. е. равносторонний треугольник, так как, согласно определению, равнобедренным называется треугольник, у которого две стороны равны; поэтому целесообразно определить равнобедренный треугольник как треугольник, у которого **по крайней мере** две стороны равны. Следует указать, что определение: „равнобедренный треугольник это треугольник, у которого только две стороны равны“, неверно.

Приучая учащихся к точным определениям, преподаватель должен помнить, что определение является средством для получения понятия. Определению понятия должна предшествовать пропедевтика, состоящая в рассмотрении ряда частных вопросов, постепенно и последовательно вскрывающих содержание понятия, а потому определение понятия следует давать лишь после того, как учащиеся отдадут себе ясный отчет в том, о чем идет речь.

На первых порах, особенно когда учащиеся только что приступили к изучению геометрии, следует ограничиваться одним пояснением нового понятия, отмечать характерные признаки понятия и давать полное определение понятия лишь после того, как учащимися оно вполне осознано. Так, прежде чем говорить о величине угла как о мере поворота луча вокруг его начальной точки, следует сперва дать определение угла: *угол есть фигура, образованная двумя лучами, исходящими из одной точки.*

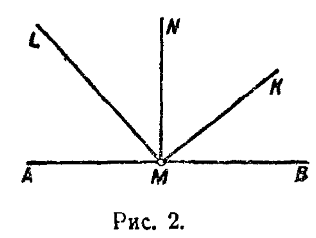


Рис. 2.

Приводим пример недостаточно точной формулировки теоремы. Рассмотрим теорему о перпендикуляре и наклонных в формулировке, приведенной в „Элементах геометрии“ Филиппса и Фишера (СПБ, 1913). Теорема гласит: „когда из данной точки проведены к одной прямой перпендикуляр и две наклонные, то они равны, если они одинаково удалены от основания перпендикуляра“.

Формулировка теоремы неверна: в ней не указано, что точка, из которой проведены перпендикуляр и две наклонные, лежит вне прямой. На рисунке 2 дано пояснение приведенной формулировки: из точки M на прямой AB проведены к AB перпендикуляр MN и наклонные MK и ML, проходящие через точку M — основание перпендикуляра — и потому одинаково удаленные от основания M на расстояние, равное нулю; из этого не следует, что эти наклонные равны, к тому же сравнить их между собою нельзя.

В геометрии Давидова (М., 1913, изд. 33-е) дана формулировка обратной теоремы: „если два равных угла AOB и COD имеют общую вершину O и две стороны OB и OC на одной прямой линии, то и две другие стороны AO и OD составляют одну прямую линию, и потому углы AOB и COD — противоположные“.

В геометрии Ващенко-Захарченко (Киев, 1883) эта теорема формулирована так: „если два равных угла так расположены, что одна из сторон первого есть продолжение стороны второго, то другая сторона первого будет продолжением другой стороны второго“.

Иллюстрация этих формулировок дана на рисунке 3. Приводимый рисунок вскрывает неточность данных формулировок; так, углы *AOB* и *COD* удовлетворяют условиям теоремы, однако они отнюдь не являются противоположными.

Правильная формулировка этой теоремы приводится ниже, в разделе „Треугольник".

Все это указывает на то, насколько серьезна должна быть подготовка преподавателя, насколько он сам прежде всего должен быть внимателен при даче определений и насколько он должен следить за каждым произносимым им словом.

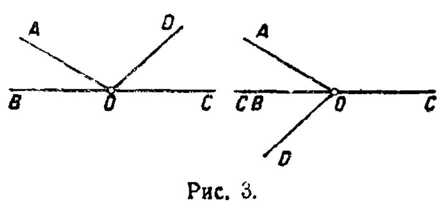


Рис. 3.

В тех случаях, когда во избежание громоздкости определения и формулировки теоремы и в целях лучшего запоминания определенного факта даются заведомо неполные, а следовательно и не вполне точные определения и формулировки, следует на это всегда указывать учащимся. Так, краткая формулировка теоремы Пифагора: *квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов*, неточна; запоминать же ее в правильной и громоздкой формулировке необязательно. Важно, чтобы учащийся умел объяснить, в чем неточность формулировки, и при надобности сумел бы дать и полную формулировку, хотя бы „своими словами".

§ 3. Методы: аналогия, индукция и дедукция.

Аналогия.

1. Различают три главных вида умозаключений: дедукцию, индукцию и аналогию, которыми пользуются при доказательствах.

Дедуктивный метод доказательства заключается в том, что от общего переходят к частному; индукция — это переход от частного к общему, и, наконец, аналогия — переход от одного частного к другому частному — заключается в том, что вывод, сделанный из рассмотрения какого-либо одного факта, переносят на ему подобный; в отдельных случаях иногда довольно трудно провести резкую грань между аналогией и индукцией.

Остановимся на аналогии и рассмотрим несколько примеров умозаключений по аналогии. Если предложить учащимся провести окружность, вписанную или описанную по отношению к четырехугольнику, то для такого построения они по аналогии, естественно, прибегнут к методам, которыми строится окружность, вписанная или описанная по отношению к треугольнику. Однако опыт убедит их, что построение не всегда возможно, что для построения окружности, вписанной или описанной по отношению к четырехугольнику, требуется выполнение определенных условий, а именно: вписать окружность в четырехугольник можно лишь тогда, когда сумма двух противолежащих его сторон равна сумме двух других его сторон, описать же окружность около четырехугольника можно лишь тогда, когда сумма двух противолежащих его углов равна сумме двух других его углов.

Принимая во внимание, что прямоугольнику на плоскости соответствует прямоугольный параллелепипед в пространстве, заключаем по аналогии об однозначном соответствии ряда свойств обеих фигур:

1) Квадрат диагонали прямоугольника равен сумме квадратов двух его измерений.	Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.
2) Диагонали прямоугольника равны.	Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.
Точно так же:	
3) Диагонали параллелограма взаимно делятся пополам.	Диагонали параллелепипеда взаимно делятся пополам.
4) Сумма квадратов диагоналей параллелограма равна сумме квадратов всех его сторон.	Сумма квадратов диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов всех его ребер.
5) Параллелограм и прямоугольник, имеющие равные основания и равные высоты, равновелики.	Наклонный и прямой параллелепипеды, имеющие равновеликие основания и равные высоты, равновелики.
6) Медианы треугольника пересекаются в одной точке.	Средние линии тетраэдра пересекаются в одной точке.
7) Площадь прямоугольника равна произведению двух его измерений.	Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.
8) Площадь параллелограма равна произведению его основания на высоту.	Объем параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту.

Интересно отметить, что Евклид, пользуясь аналогией, называет произведение двух чисел площадью, множители — сторонами прямоугольника, произведение трех чисел — телом, числа — ребрами, произведение двух или трех одинаковых чисел — соответственно квадратом или кубом.

Приводим пример неправильного заключения по аналогии, часто встречающегося в школьной практике. Учащийся знает, что если $a \cdot 5 = b \cdot 5$, то и $a = b$, и потому заключает по аналогии, что если $m \cdot 0 = n \cdot 0$, то и $m = n$. Каждый преподаватель хорошо знает, к каким грубым ошибкам приводит такое „заключение по аналогии“, в особенности — при решении уравнений.

Выводы по аналогии допустимы только в начальном курсе геометрии и то только тогда, когда преподаватель уверен, что сделанный учащимися вывод верен; все же преподаватель обязан указать учащимся, что аналогия только наводит их на заключение и что сделанное ими заключение еще должно быть подтверждено доказательством путем дедукции.

Индукция.

2. Вторым методом умозаключений является индукция. Индуктивный метод ведет от частного к общему. Различают полную, неполную и математическую индукции. Полная индукция есть умозаключение, в котором объединяется то, что установлено для частных случаев. Примером полной индукции может служить вывод теоремы: *вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту*

же дугу, и измеряется половиной этой дуги, который получается после предварительного рассмотрения трех различных возможных случаев, а именно, когда стороны угла: 1) диаметр и хорда, 2) хорды, лежащие по разные стороны от центра, и 3) хорды, лежащие по одну сторону от центра.

Обобщая полученный в каждом отдельном случае вывод, заключаем, что суждение справедливо для любого положения относительно центра хорд, выходящих из одной точки окружности.

Неполной индукцией называется умозаключение, в котором на основании рассмотрения лишь одного или небольшого числа отдельных частных случаев какого-либо класса явлений делается вывод, относящийся ко всему классу явлений.

Рассмотрим, как определить методом неполной индукции наибольшее число прямых, которые можно провести через n точек на плоскости, из которых никакие три точки не лежат на одной прямой.

Обозначим через N_n наибольшее число прямых, которые можно провести через n точек. Через две данные точки можно провести только одну прямую, и $N_2 = 1$. Далее получим:

$$N_3 = 1 + 2$$
$$N_4 = 1 + 2 + 3$$
$$N_5 = 1 + 2 + 3 + 4$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Приходим к выводу, что наибольшее число прямых, которые можно провести через n точек,

$$N_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1).$$

Методом неполной индукции иногда выводится и теорема Эйлера о связи между числом ребер P, числом вершин B и числом граней Γ выпуклого многогранника: $P = B + \Gamma - 2$. Этим же методом иногда пользуются при выводе формулы разложения в строку бинома n-й степени.

Необходимо подчеркнуть учащимся, что заключения, сделанные на основании рассмотрения лишь небольшого числа фактов, не всегда могут быть верны, а потому необходимо к подобного рода заключениям отнестись с сугубой осторожностью. Так, например, учащиеся, изучая планиметрию, привыкли иметь дело со взаимным положением прямых двух видов: прямыми пересекающимися и прямыми параллельными. На основе этого неполного пространственного опыта они делают умозаключение, что прямые могут находиться только в указанных двух взаимоположениях.

В силу этого при переходе к изучению стереометрии учащиеся, встречаясь с третьим видом взаимного положения прямых, не пересекающихся и в то же время не параллельных, т. е. со скрещивающимися прямыми, с трудом разрушают умозаключение, ранее ими построенное на неполной индукции.

Чтобы довести до строгого доказательства обобщение, полученное на основе неполной индукции, в математике усилиями Паскаля (1623—1662) и Я. Бернулли (1654—1705) выработана особая математическая индукция.

Для понимания, в чем заключается этот метод, рассмотрим прежние примеры.

1. Разбор последовательно полученных ответов в первом примере приводит к формуле, выражающей сумму $(n-1)$ чисел натурального ряда. Затем решается вопрос, чему равно число прямых, если к данным n точкам присоединить еще одну точку, $(n+1)$-ю. Очевидно, что через $(n+1)$-ю точку и остальные n точек можно провести еще n прямых, а потому через $(n+1)$ точку можно провести $1+2+3+\ldots+(n-1)+n$ прямых. Убеждаются, что вывод, верный для n точек, верен и для $(n+1)$ точек, а так как он верен хотя бы для двух точек, когда получается одна прямая, то, следовательно, он верен для любого числа точек.

2. Второй пример доведен до строгого доказательства по методу математической индукции во II части нашей книги.

3. Третий пример также математической индукцией доведен до конца в „Алгебре" Киселева, ч. II.

В элементарном курсе геометрии пользуются нередко неполной индукцией, особенно когда строгое доказательство какого-либо математического факта непосильно для учащихся в силу их возраста и их неподготовленности и когда и интуиция в должной мере оказала свое воздействие на выяснение рассматриваемого математического факта.

Так, например, теорема об алгебраической сумме ограниченного числа бесконечно малых переменных или теорема о произведении или частном двух бесконечно малых переменных доказываются рассмотрением отдельных частных случаев, при этом получаемый вывод обобщается и распространяется на все величины данного класса.

Следует заметить, что неполная индукция не есть научный метод доказательства; это скорее — педагогический метод, к которому с осторожностью следует прибегать в элементарном к рсе математики, когда, как было указано, строгое доказательство выходит за пределы элементарного курса и тем самым превосходит силы и развитие учащихся

Дедукция.

3. Дедукция, в отличие от индукции, есть умозаключение от общего к частному. Дедуктивным методом изложена геометрия Евклида.

Если аналогия и неполная индукция более доступны младшему возрасту, то дедукция доступна преимущественно старшему возрасту. Пример умозаключения методом дедукции:

1) углы, опирающиеся на дуги, дополняющие друг друга до полной окружности, пополнительны;

2) противолежащие углы вписанного четырехугольника опираются на дуги, дополняющие друг друга до окружности;

вывод: **противолежащие углы вписанного четырехугольника пополнительны.**

Дедуктивный метод умозаключения играет большую роль при решении задач, так как решение любой задачи всегда сводится к использованию какого-нибудь общего, ранее установленного закона. Особенно велико значение дедукции, когда требуется проверить какое-либо суждение с помощью уже известных суждений. Отсюда необходимость время от времени возвращаться к повторению учащимися ранее полученных выводов.

При начальной проработке материала какого-нибудь раздела следует осторожно применять дедукцию, используя всевозможные методы восприятия и вместе с тем постепенно подводя учащихся к дедуктивному методу мышления.

Необходимо следить за тем, чтобы учащиеся при решении задач по готовым формулам не пользовались ими бессознательно, механически. Необходимо возможно чаще требовать, чтобы учащиеся поясняли, на основании каких рассуждений дедуктивно решается ими та или иная задача, почему ими применяется в данном случае та или иная формула. Только тогда, когда преподаватель уверен, что при решении учащимися задачи каждое действие выполняется ими сознательно, не следует в целях экономии времени останавливаться на подробном пояснении каждого отдельного действия.

Пусть дана задача:

Вычислить площадь правильного вписанного двенадцатиугольника по данному радиусу R.

Обычное решение задачи следующее: учащийся находит сперва сторону двенадцатиугольника; она равна $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$; затем он вычисляет апофему и, взяв половину произведения периметра двенадцатиугольника на апофему, получает искомую площадь: $S=3R^2$ кв. ед.

Задача решена дедуктивным методом, использована формула площади n-угольника для частного случая, для нахождения площади двенадцатиугольника.

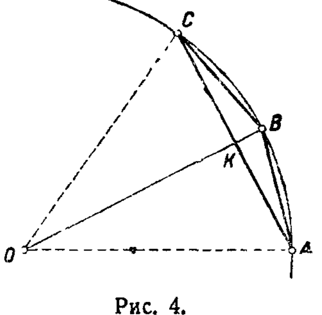


Рис. 4.

Возможно, однако, и другое, более простое решение задачи, скорее приводящее к цели. Следует использовать два прилежащих основных треугольника AOB и BOC (рис. 4), образующих четырехугольник $OABC$, и провести в нем диагональ AC; эта диагональ пересечет отрезок OB в точке K; при этом отрезок $CK \perp OB$ и $CK=\frac{R}{2}$, так как CA - сторона правильного вписанного шестиугольника, и $S_{\triangle}=\frac{OB \cdot CK}{2}=\frac{R^2}{4}$ — искомая площадь треугольника OBC, а затем находим: $S_{12}=12S_{\triangle}=3R^2$ кв. ед. Так же можно получить площадь правильного восьмиугольника и т. д.

Мы привели два решения одной и той же задачи; этим мы имеем в виду указать, что не следует приучать учащихся при решении однотипных задач пользоваться только каким-либо одним приемом решения задачи; напротив, следует добиваться, чтобы пытливый ум учащегося, пользуясь интуицией, искал и находил иные, новые пути решения задач. И если учащимися найдены различные способы решения одной и той же задачи, следует сопоставить между собою найденные решения и отметить, какое из них является наиболее простым и изящным.

В наше время бурного соцстроительства привитие учащимся и на уроках математики рационализаторских навыков, требующих исследования вопроса и нередко ведущих к изобретательству, особенно ценно и необходимо.

Рассмотрим задачу:

В каком многоугольнике число всех диагоналей равно 65?

При решении этой задачи учащиеся могут, конечно, воспользоваться формулой $\frac{n(n-3)}{2}$, определяющей число диагоналей многоугольника. Если же они ее запамятовали, они могут методом индукции получить ее, рассуждая примерно так:

в четырехугольнике $\frac{4\cdot(4-3)}{2}=2$ диагонали,

в пятиугольнике $\frac{5\cdot(5-3)}{2}=5$ диагоналей,

в шестиугольнике $\frac{6\cdot(6-3)}{2}=9$ диагоналей,

в семиугольнике $\frac{7\cdot(7-3)}{2}=14$ диагоналей и т. д

После этого учащиеся могут составить такую таблицу:

Число сторон $n=$	4	5	6	7	8	9	...	...	..	n
Число диагоналей $m=$	2	5	9	14	20	27	...	...	...	$n=\frac{n(n-3)}{2}$

Найдя формулу, по которой определяется число диагоналей n-угольника, учащийся идет уже дедуктивным путем. Пусть в искомом многоугольнике x сторон; тогда $\frac{x(x-3)}{2}=65$; решение квадратного уравнеиия дает $x_1=13$, таким образом искомый многоугольник имеет 13 сторон. Второе решение $x_2=-10$ условию задачи не удовлетворяет.

При незнании приемов решения квадратного уравнения применяется другой способ решения данной задачи; он основан на следующем: очевидно, $x(x-3)=130$, при этом x — число целое и больше 3, а потому нахождение x сводится к разложению числа 130 на такие два множителя, разность между которыми равна 3; такими множителями являются числа 13 и 10, и, следовательно, $x=13$.

В этом примере дедукция играет решающую роль.

Вполне понятно, что решение отдельных групп задач может быть и механизировано, но это может быть рекомендовано скорее для специальных школ, нежели для средних школ, и притом только для учащихся старшего возраста при достаточном их развитии, когда они могут отнестись к приемам, принятым для решения отдельных задач, с должной критической оценкой.

§ 4. Доказательство.

1. В своей работе преподаватель всегда должен помнить, что учащиеся должны научиться доказывать, но отнюдь не заучивать непонятого доказательства. Если учащимися сделан вывод методом неполной индукции, то они должны знать, что требуется еще строгое доказательство, чтобы вывод, основанный на неполной индукции, приобрел характер достоверности. Учащимся должно быть

разъяснено и они должны понимать, что всякое доказательство обосновывается или при помощи основных суждений — аксиом или при помощи уже доказанных суждений — теорем. Так, если учащиеся методом неполной индукции пришли к выводу, что сумма внутренних углов треугольника равна 2d, то еще необходимо доказать справедливость этого заключения; для этой цели используется свойство углов при параллельных и секущей.

Необходимо вести работу так, чтобы учащиеся умели четко отличать при разборе теоремы то, что дано, и то, что требуется доказать. Существенно, чтобы ход доказательства был наиболее кратким и притом отчетливым.

Не следует забывать, что всякое доказательство, даже доказательство несложной теоремы, требует от учащихся сосредоточенности внимания и напряжения мысли, поэтому нельзя перегружать урок разбором и доказательством более чем двух-трех теорем.

Когда учащимися уже приобретен навык в расчленении теоремы на отдельные составные ее части — на то, что дано, и на то, что требуется доказать, — и когда преподаватель уверен, что с помощью книги учащиеся сумеют разобраться в доказательстве теоремы, можно в качестве самостоятельной работы предложить им разобраться в доказательстве несложных теорем и следствий из них, не рассмотренных на уроке.

В 6-м классе, в котором учащиеся приступают к изучению систематического курса, большинство теорем и следствий из них должно быть разобрано преподавателем на уроке. Для самостоятельного доказательства учащимся могут быть даны только лишь такие теоремы, которые являются частными случаями уже доказанных теорем, как, например, теоремы о равенстве прямоугольных треугольников, вытекающие из теорем о равенстве косоугольных треугольников, или теоремы, доказательство кототорых не сложно.

2. Учитывая, что доказательство обратных теорем, проводимое преимущественно методом от противного, трудно дается учащимся, возможно на первых порах не останавливаться на доказательстве некоторых обратных теорем, как-то: теоремы, обратной теореме о смежных углах, обратных теорем о вписанном и описанном четырехугольнике и других; доказательство таких теорем целесообразнее отнести ко времени, когда подытоживается пройденный материал или когда проводится повторение пройденного курса, так как к этому времени учащиеся, естественно, уже приобрели необходимый навык в логическом обосновании доказываемого ими суждения.

Необходимо помнить, что следует постепенно подводить учащихся к осознанию необходимости еще и доказать справедливость высказываемых суждений о тех или иных геометрических фактах, если даже они для них бесспорны и „очевидны“, в особенности когда свойства отдельных фигур поясняются на моделях.

3. Если нередко учащиеся и заявляют, что им без доказательства все ясно, то все же, особенно в старших классах, нельзя ограничиваться только одной интуицией учащихся, необходимо еще провести и логическое доказательство.

Весьма полезно на каком-либо примере показать учащимся, что не всегда можно доверяться первому впечатлению, полученному от модели или чертежа.

Так, если вычертить на доске правильный шестиугольник, провести в нем 3 наибольшие его диагонали и предложить учащимся пояснить, что начерчено, то они обычно указывают, что начерчены шестиугольник и 3 его диагонали. Они немало бывают удивлены, когда узнают, что выполненное построение позволяет усмотреть на рисунке 6 равносторонних треугольников, или не покрывающие друг друга 3 ромба, или 2 трапеции, или 2 ромба и 2 треугольника, или треугольник, ромб и трапецию, или, наконец, куб (рис. 5). Поясняя рисунок, преподаватель должен оттенить штриховкой отдельные фигуры. Подобный пример убеждает учащихся, что не всегда следует доверяться зрительному восприятию.

Отсюда следует, что при вычерчивании геометрической фигуры необходимо ее расположить и вычертить так, чтобы не могло возникнуть какое-либо сомнение ни относительно ее вида, ни относительно расположения отдельных ее частей.

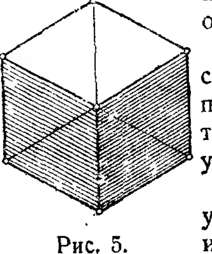


Рис. 5.

Понятно, что учащихся следует приучать к выполнению четкого чертежа, соответствующего условиям задачи.

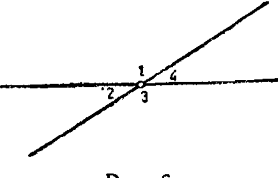


Рис. 6.

Как показывает опыт, учащиеся, когда им задано изобразить треугольник, обычно вычерчивают один из частных видов треугольника: равнобедренный, равносторонний или прямоугольный; следует приучать их к тому, чтобы в тех случаях, когда не указан видовой признак треугольника, они вычерчивали треугольник общего вида, т. е. разносторонний, и, разумеется, не прямоугольный. То же замечание относится и к вычерчиванию четырехугольника; если не дан видовой признак, следует вычерчивать не параллелограм, прямоугольник, ромб, квадрат или трапецию, а трапецоид, т. е. четырехугольник общего вида.

Приведенный пример указывает, что при выполнении чертежа необходимо расположить вычерчиваемую фигуру так, чтобы при пользовании рисунком не могло возникнуть сомнение относительно расположения отдельных элементов фигуры.

Следует считаться и с возрастом и развитием учащихся и наличием у них запаса знаний. При доказательстве из общей цепи умозаключений нельзя упускать ни одного звена, иначе учащиеся не смогут разобраться в доказательстве. В силу этого от учащихся следует требовать записи доказательства звено за звеном, в строгой логической последовательности.

4. Что касается строгости доказательства, то понятно, что на первых порах требовать ее от учащихся и нельзя; этого преподаватель должен добиваться постепенно, по мере накопления знаний и опыта у учащихся.

Начинать курс геометрии, как это делает Евклид, с перечисления всех аксиом не следует. Аксиомы должны вводиться постепенно, по мере их надобности, как об этом указывается в соответствующих разделах.

Не лишне иногда рассмотреть доказательство той или иной теоремы сперва на частных случаях, на специально подобранных фигурах, чтобы лишь затем перейти к рассмотрению общего случая. Рассмотрим *теорему о противоположных углах.* Проводят две пересекающиеся прямые и предлагают учащимся измерить угол *1* (рис. 6), а затем, не

прибегая к измерению, найти величину угла 2, затем — угла 3 и, наконец, угла 4. Когда такой „опыт“ проделан, предлагается найти величину углов, образуемых двумя пересекающимися прямыми, если один из углов, положим $\angle 1$, равен 150°. После такой проработки вопроса доказательство теоремы о равенстве противоположных углов не представляет для учащихся затруднений.

По мере проработки материала и накопления опыта учащиеся должны убедиться в единообразии путей, ведущих к доказательству ряда предложений. Так, признаки параллельности двух или более прямых основаны на равенстве соответственных или накрест лежащих углов, равенство отрезков или углов обычно доказывается равенством треугольников и т. д.

5. Для учащихся весьма часто не сразу убедительно доказательство методом расчлененной абстрактной дедукции, а потому следует сопровождать доказательство интуицией (воззрением), разбором соответствующего чертежа и показом необходимой модели. В качестве примера укажем на классическое доказательство теоремы Пифагора. Можно поэтому предварить классическое доказательство наглядным индусским доказательством (рис. 7) с его лаконическим „смотри“, после чего классическое доказательство Евклида, приведенное в стабильном учебнике, становится им более понятным. Можно предложить затем учащимся начертить прямоугольный треугольник, измерить его стороны, положим, с точностью до 0,1 и проверить теорему; конечно, имеется в виду, что учащиеся умеют выполнять вычисления с приближенными числами.

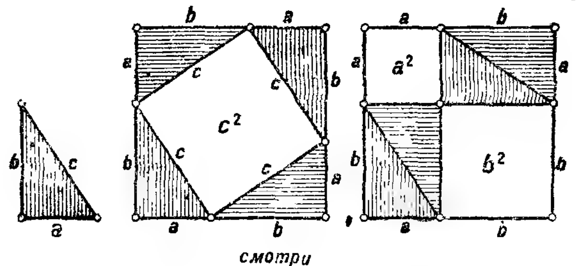


Рис. 7.

Доказательство признаков равенства треугольников наложением, и притом „умственным“, также нелегко дается учащимся. Самый способ наложения и последовательность доказательства становятся учащимся более понятными, если предложить им сперва построить два треугольника по трем независимым данным, затем вырезать их и фактически наложить один на другой. Они, таким образом, непосредственно „видят“, в каком порядке проводится доказательство наложением, и затем уже доказывают конгруэнтность треугольников, или их равенство, а следовательно, и равенство всех их отдельных элементов.

В других случаях могут оказать помощь модели. Преподаватель всегда должен помнить, что логическое доказательство каких-либо сложных предложений следует по возможности предварить и опытом и частными примерами.

Иногда возможно иллюстрировать свойства фигуры на моделях или же проделать тот или иной опыт после того, как доказательство теоремы проведено, **при этом необходимо помнить, что опыт отнюдь не должен подменять собою логическое доказательство.**

Особо важную роль играют модели и моделирование самими учащимися при изучении стереометрии, учитывая, с одной стороны, сложность всякого рода пространственных построений, с другой — недостаточное развитие пространственных представлений учащихся.

6. Вполне понятно, что, прежде чем приступить к доказательству той или иной теоремы, учащийся должен хорошо уяснить себе, чтó иадо доказать; только тогда он и может решить вопрос, можно ли непосредственно притти к нужному заключению или же требуются еще какие-либо дополнительные построения для проведения доказательства.

Весьма важно, чтобы учащиеся научились доказывать теоремы в определенной последовательности и умели указать, какими аксиомами и уже ранее доказанными теоремами приходится пользоваться при доказательстве той или иной теоремы; необходимо заметить, что последнее зависит и от того, в каком месте курса рассматривается теорема.

В качестве примера, как следует провести доказательство, рассмотрим теорему:

два треугольника подобны, если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и углы, заключенные между пропорциональными сторонами, равны.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, следует убедиться, знают ли учащиеся все теоремы и аксиомы, на которые приходится ссылаться при доказательстве. Так, рассматривая приведенную теорему, можно поставить учащимся примерно такие вопросы:

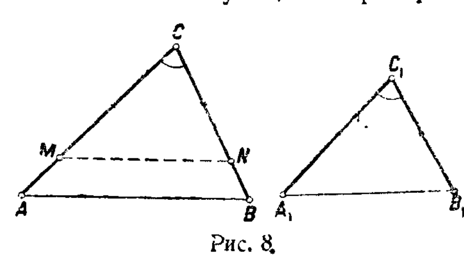


Рис. 8.

1) какие вы знаете признаки равенства треугольников?

2) какие треугольники называются подобными?

3) какие стороны подобных треугольников называются сходственными?

4) каким наиболее простым приемом построить треугольник, подобный данному, или какой получится треугольник, если отсечь от данного треугольника треугольник прямою, параллельною одной из сторон данного треугольника, и т. д.

После этого следует приступить к доказательству теоремы. Учащийся внимательно прочитывает теорему, отмечает то, что дано, и то, что требуется доказать, набрасывает от руки чертеж (рис. 8), записывает условие и заключение теоремы и, наконец, отмечает на чертеже данные, указанные в условии теоремы.

Запись.

Дано: $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$; $\angle C = \angle C_1$.

Треб. док. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство. Указывается, что прямая, параллельная одной из сторон треугольника ABC, отсекает от него треугольник, ему подобный. Чтобы связать отсекаемый треугольник с данным треугольником $A_1B_1C_1$, следует выполнить следующее построение: откладывают от вершины C треугольника ABC отрезок $CM = C_1A_1$, а затем проводят через точку M прямую MN параллельно стороне AB треугольника ABC.

Построение кратко записывают так: $CM = C_1A_1$ и $MN \parallel AB$. Когда прямая MN проведена, получаются два подобных треугольника: $\triangle ABC$ и $\triangle MNC$, запись: $\triangle ABC \backsim \triangle MNC$. Сравнивая последнюю запись с записью того, что требуется доказать, заключаем, что теорема была бы доказана, если бы было известно, что треугольники MNC и $A_1B_1C_1$ равны; однако последнее неизвестно, а потому необходимо убедиться в том, что треугольники MNC и $A_1B_1C_1$ равны. Равенство двух треугольников определяется признаками равенства треугольников при условии, что оба сравниваемые треугольника имеют по крайней мере по одной равной стороне. В данном случае это условие налицо, так как согласно построению $CM = C_1A_1$.

Перебираем признаки равенства треугольников: (УСУ), (СУС), (ССС), (ССУ).

Согласно первому признаку два треугольника равны по стороне и двум прилежащим углам. Этот признак, однако, не может быть применен, так как, если согласно построению сторона CM и равна стороне C_1A_1 и согласно условию теоремы $\angle C = \angle C_1$, то нет никаких указаний о равенстве двух других углов: угла M и угла A_1, прилежащих к равным сторонам CM и C_1A_1.

Обращаемся ко второму признаку: два треугольника равны по двум сторонам и углу между ними. Данный признак мог бы быть использован, если бы $NC = B_1C_1$, так как $CM = C_1A_1$ и $\angle C = \angle C_1$. Из условий теоремы заключаем, что отрезок C_1B_1 является одним из членов пропорции:

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}; \tag{1}$$

что касается отрезка NC, то он входит в пропорцию

$$\frac{AC}{MC} = \frac{BC}{NC}, \tag{2}$$

которую можно записать на основании подобия треугольников ABC и MNC.

Из пропорции (1) находим:

$$B_1C_1 = \frac{BC \cdot A_1C_1}{AC};$$

из пропорции (2) находим:

$$NC = \frac{BC \cdot MC}{AC} = \frac{BC \cdot A_1C_1}{AC},$$

так как $MC = A_1C_1$ согласно построению. Сравнивая правые части последних двух равенств, заключаем, что $B_1C_1 = NC$. Итак, $MC = A_1C_1$, $B_1C_1 = NC$ и $\angle C = \angle C_1$, откуда непосредственно следует, что $\triangle MNC = \triangle A_1B_1C_1$ (СУС). Но согласно построению $\triangle ABC \backsim \triangle MNC$, с другой стороны $\triangle MNC = \triangle A_1B_1C_1$, а потому, заменив треугольник MNC равным ему треугольником $A_1B_1C_1$, имеем: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, что и требовалось доказать.

Следует еще указать учащимся, что признаку подобия двух треугольников по двум пропорциональным сторонам и равному углу между ними соответствует признак равенства треугольников по двум равным сторонам и равному углу между ними.

Такое сопоставление, во-первых, помогает учащемуся запомнить ход доказательства теоремы и, во-вторых, позволяет сделать вывод, что равенство треугольников есть частный случай подобия треугольников.

Краткая запись теоремы и ее доказательства:

$$\text{Дано } \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}; \quad \angle C = \angle C_1$$

$$\text{Треб. док. } \triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1.$$

Доказательство. $CM = C_1A_1$; $MN \parallel AB$.

$$\triangle ABC \backsim \triangle MNC \text{ и } \frac{AC}{MC} = \frac{BC}{NC}; \quad \underline{\triangle A_1B_1C_1 = \triangle MNC?}$$

$$B_1C_1 = \frac{BC \cdot A_1C_1}{AC} \quad \text{и} \quad NC = \frac{BC \cdot MC}{AC} = \frac{BC \cdot A_1C_1}{AC}$$

$$\left.\begin{aligned} B_1C_1 &= NC \\ CM &= C_1A_1 \\ \angle C &= \angle C_1 \end{aligned}\right\} \triangle A_1B_1C_1 = \triangle MNC.$$

$$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1.$$

7. Необходимо также научить учащихся использовать каждый вывод, который попутно получается при доказательстве той или иной теоремы; так, при доказательстве свойства биссектрисы угла при вершине равнобедренного треугольника попутно устанавливается, что углы при основании равнобедренного треугольника равны. Этим важным выводом приходится пользоваться весьма часто, поэтому этот вывод в ряде учебников, в том числе и в стабильном, непосредственно включен в теорему.

Не менее важно научить учащихся критически пользоваться накопленными знаниями для решения поставленной задачи, будь то доказательство теоремы или задача на построение или вычисление.

Учитывая, что для учащихся метод доказательства от противного является весьма трудным и не всегда достаточно убедительным, следует по возможности избегать этого метода доказательства и заменять его прямым доказательством, невзирая на то, что такое доказательство является иногда и более многословным и более длинным.

§ 5. Построение элементарного курса геометрии.

1. Как, в каком порядке проходить курс геометрии? Можно было бы следовать системе, принятой Евклидом, в которой, повидимому, нет „провалов", в которой каждая теорема вытекает из предыдущего; у Евклида каждая теорема занимает свое определенное место; теоремы, которые хотя и имеют самостоятельную ценность, но не служат для обоснования другой теоремы, им не рассматриваются. Так, у Евклида отсутствует теорема: диагонали параллелограма делятся взаимно пополам; в его системе она ему не нужна.

Также почти не встречаем мы у Евклида определений и доказательств, основанных на движении. А между тем в целях развития у учащихся пространственных представлений необходимо ставить работу по геометрии так, чтобы рассматриваемые ими фигуры оживали, приходили

в движение. Учащийся должен видеть и понимать, как в зависимости от изменения соотношения между отдельными элементами рассматриваемая фигура преобразуется, теряет ряд своих свойств и переходит в фигуру, иную по форме, приобретая вместе с тем новые, лишь ей присущие свойства.

Идея движения должна быть введена с самого начала курса геометрии. Уже основные понятия, как понятия о линии, поверхности и теле, должны быть вскрыты учащимся как образы, получаемые движением соответственно точки, линии и поверхности.

Идею угла следует сочетать с идеей вращения уже с самого начала; проведение этого взгляда плодотворно для последующих занятий и по геометрии и по тригонометрии. Мы не мыслим себе рассмотрения вопроса о четырехугольниках, о средней линии треугольника и трапеции, о секущей и касательной, о метрических соотношениях в треугольнике, о конических сечениях, о проверке теоремы об усеченном конусе путем перехода к полному конусу и ряда других вопросов, не используя в достаточной мере идею движения.

В каком порядке проходить курс геометрии?

Несомненно, систематическому курсу геометрии должен предшествовать хотя бы краткий пропедевтический курс, при этом вопросы этого курса должны рассматриваться в связи с прохождением курса арифметики. Следует иметь в виду, что пропедевтический курс отнюдь не должен заменять всестороннюю проработку отдельных тем систематического курса геометрии; основная его задача — развитие у учащихся пространственных представлений, осознание ими формы предметов, умение выявить отличительные признаки отдельных тел и фигур и их важнейшие свойства, приобретение навыков в измерении отрезков, построении простейших геометрических образов, решении несложных практических задач; на этой же ступени делаются первые шаги к воспитанию логического мышления на геометрическом материале. Отсюда естественное своеобразие работы: ознакомление с геометрическими образами и фактами на *конкретном* материале, максимальное использование наглядных пособий, вычерчивание фигур, вырезывание разверток тел, моделирование, широкое использование интуиции при выявлении свойств фигур, увязка теории с практикой — решение простейших задач на вычисление и построение.

Преподаватель должен все время помнить, что на этой ступени развития учащиеся ценят *конкретный* образ выше определения, что необходимо по преимуществу ограничиться *интуицией* — непосредственным восприятием учащимися правильности геометрического суждения — и лишь в крайне ограниченных случаях пользоваться логическим доказательством.

Объем материала пропедевтического курса геометрии очерчен программой Наркомпроса.

2. Начиная с 6-го класса, учащимся дается *систематический*, преимущественно логически построенный элементарный курс геометрии; его программа и объем очерчены программами Наркомпроса для 6, 7, 8, 9-го классов.

Нужно отметить, что систематический курс геометрии, проводимый в средней школе, все же не есть строго логический курс геометрии в полном смысле этого слова.

В строго логическом курсе геометрии нет места интуиции, наглядности: каждый вопрос, рассматриваемый в нем, требует строгого доказательства; такие курсы, конечно, недоступны учащимся средней школы. Примером такого курса могут служить „Основания геометрии“ Гильберта.

Следует иметь в виду, что изучение систематического курса геометрии отнюдь не должно протекать в отрыве от практической деятельности. Опыт, предваряющий доказательство или подтверждающий уже доказанную теорему, должен найти свое место и в систематическом, логическом курсе геометрии; практические жизненные процессы должны подчас являться исходным моментом суждения, которое затем теоретически подтверждается; в других случаях теоретические выводы иллюстрируются примерами из окружающей действительности.

При изучении геометрии мы, конечно, не можем целиком следовать отвлеченной евклидовой форме изложения; мы значительно отклоняемся от окаменевших за период в две тысячи лет евклидовых форм и в целом ряде случаев заменяем догматический метод Евклида евристическими приемами.

Идея движения, наглядность, использование моделей, особенно при прохождении стереометрии, идея симметрии, решение задач на построение, приложение теории к решению практических задач, проведение аналогии между отдельными вопросами планиметрии и стереометрии, составление сводок, систематизация пройденного, выявление широкой инициативы со стороны учащихся в деле постановки ими вопросов и самостоятельного разрешения ими ряда проблем — вот главнейшие вехи, указывающие преподавателю путь методического построения курса.

Преподаватель должен помнить, что „...геометрия представляет собою науку живую и растущую“, как говорит Юнг в своей книге „Как преподавать геометрию“; „если ее изучать так, чтобы учащийся сам делал некоторые открытия, он почувствует ее жизнь; но для того, чтобы делать открытия, он должен ставить вопросы, должен взвешивать различные возможности по поводу рассматриваемого вопроса и вникать в них“.

„Могут возникнуть вопросы, которые окажутся слишком трудными для элементарного курса, но они дадут преподавателю возможность сделать небольшой экскурс в область геометрического творчества древнего и нового, выходящую за пределы обычного курса. При таком ведении дела учащийся подойдет к концу курса, совершенно не истощив своей способности к изучению; быть может, при этом некоторые задачи останутся у него неразрешенными, и по наслышке он будет знать о некоторых важных отраслях геометрического исследования, отличающихся от тех отделов и приемов геометрии, которыми он занимался. Для него геометрия не будет представляться отлитою из чугуна вещью, все содержание которой целиком заключается в изученной им книге; он будет смотреть на нее как на обширную, все время растущую область знания, из которой он знает только одну часть. Он будет предвкушать удовольствие, какое может доставить более глубокое и более критическое понимание тех отделов, какие им уже изучены; он будет стремиться к расширению своего понимания других частей предмета“.

3. Преподаватель должен суметь: 1) надлежащим образом использовать накопленные учащимися знания для развертывания перед ним школьного логического курса геометрии, в котором логическое доказатель-

ство выдвигается на первое место, где интуиция играет роль разведки, а опыт отходит на задний план; 2) приучить учащихся находить новые геометрические факты; 3) подкреплять при рассмотрении отдельных вопросов теоретические выводы иллюстрацией их практической ценности и тем самым находить тесную увязку теории с практикой; 4) использовать явления окружающей действительности, опыт и интуицию как стимул для постановки вопроса, отнюдь не заменяя логическое доказательство опытом; 5) приучить учащихся усматривать взаимозависимость между отдельными геометрическими фактами; 6) развить в учащихся наблюдательность, строгость и последовательность в суждениях, любознательность, любовь к исследованию; 7) научить, наконец, учащихся пользоваться учебной книгой, вести четкую конспективную запись, выполнять опрятно и точно чертежи и быть всегда готовыми к ответу — вот ответственная и сложная задача преподавателя, начиная с первых же занятий по геометрии.

4. Как уже сказано, отдельные теоретические выводы следует иллюстрировать явлениями окружающей действительности, с другой стороны, следует не раз показать учащимся на примерах, что решение практических задач, которые ставит перед нами жизнь, весьма просто выполняется благодаря тому, что теория дает нам указания, как мы должны их выполнять.

Ниже приводятся примеры, имеющие целью показать, как можно использовать, с одной стороны, факты из окружающей действительности для пояснения теоретического вывода и, с другой стороны, теоретические выкладки для решения задачи, выдвигаемой практикой жизни.

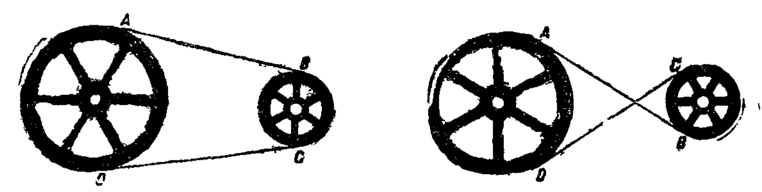


Рис. 9.

Понятно, что приводимые примеры должны быть даны учащимся в соответствующем месте курса. Должно отметить необходимость отбора тщательно продуманного материала, которым имеется в виду пояснить учащимся, как решение практической задачи оказывает влияние на разработку теоретических вопросов и, наоборот, знание теории помогает правильному решению практических проблем.

Примеры. 1) Ременная передача, наружная и внутренняя (рис. 9), может служить иллюстрацией расположения касательных к двум окружностям.

2) Плоская лента из жести изогнута волнообразно так, что ее разрез состоит из последовательно вогнутых и выпуклых полуокружностей. Сколько нужно взять метров прямой ленты, чтобы получить a метров волнообразной?

За длину ленты в технике принимается отрезок, концами которого служат крайние точки ленты, как показано на рисунке 10.

Решение. Согласно условию длина волнообразной ленты AB равняется a метрам (рис. 10). Допустим, что волнообразная лента состоит из n полуокружностей, тогда диаметр каждой полуокружности равен $\frac{a}{n}$ метрам. Длина каждой полуокружности равна $\frac{\pi d}{2} = \frac{\pi a}{2n}$, длина же всех n полуокружностей равна $\frac{\pi a}{2n} \cdot n = \frac{\pi a}{2}$. Полученный ответ указывает, что для изготовления волнообразной ленты длиною в a метров надлежит взять прямую ленту длиною в $\frac{\pi a}{2}$ метров, т. е. ленту, которая в $\frac{\pi}{2}$ раза длиннее длины волнообразной ленты.

Рис. 10.

Следует обратить внимание на то, что полученный ответ не содержит числа n; это означает, что длина волнообразной ленты не зависит от числа полуволн, из которых она состоит.

Систематизация материала.

5. Каждому человеку свойственно вскрывать определенные связи между отдельными явлениями окружающего нас мира, глубже проникать в познание существующего порядка и изучать взаимозависимость отдельных явлений. Вполне естественно и в математике после изучения какого-нибудь раздела просмотреть с учащимися еще раз все пройденное, отметить при этом все наиболее существенные места и составить определенную схему, которая помогла бы как наглядное пособие не только „обозреть" пройденное, но и подчеркнуть определенную связь между отдельными геометрическими фактами.

Так, можно привести в систему сведения о треугольниках или о четырехугольниках и дать соответствующую схему (см. главы: „Треугольник" и „Четырехугольник").

Ниже дана примерная схема, систематизирующая сведения об окружности (см. схему на стр. 27).

Когда учащимся дана схема, проработанная ими вместе с преподавателем, то им сравнительно легко восстановить в своей памяти взаимозависимости между окружностью, точкой и прямой или между двумя окружностями. Кроме того, если учащиеся понимают, к какому звену этой цепи относится тот или иной разрешаемый ими вопрос, то можно с уверенностью сказать, что они найдут пути к решению задачи.

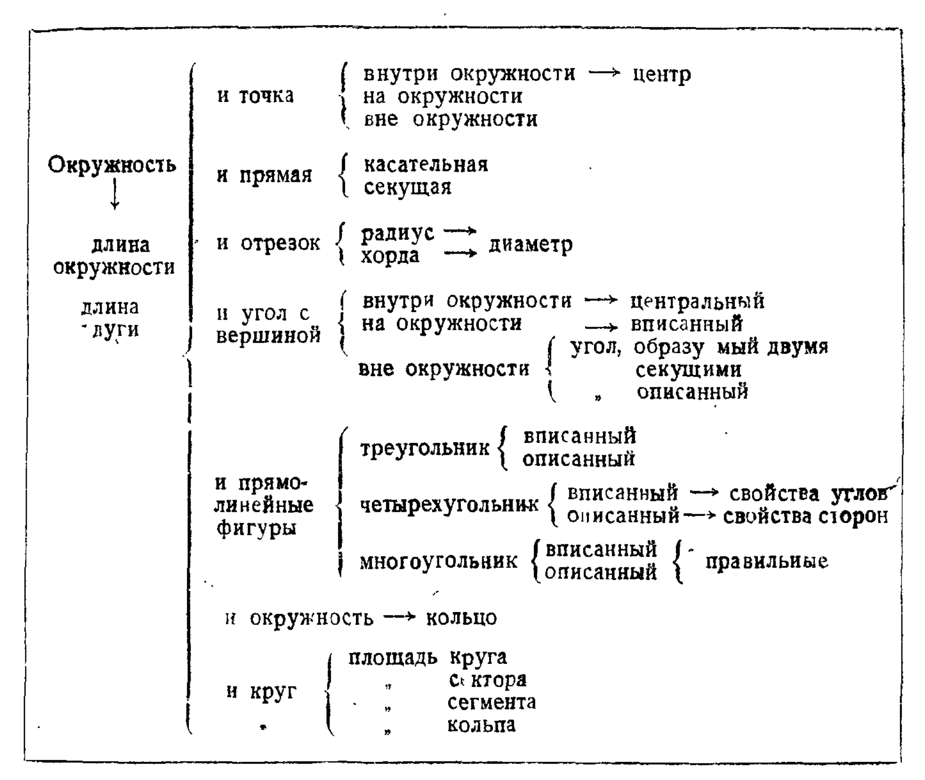
Преподаватель, конечно, должен знать, что нельзя начинать с готовой схемы и что всякие схемы должны соответствовать возрасту и развитию учащихся.

Так, при проработке пропедевтического курса можно обойтись простым перечислением геометрических тел и ограничиться подразделением их на „многогранники" и „круглые тела". При проработке систематического курса следует уже требовать определенной последовательности в расположении тел по видовым признакам каждой родовой группы. Само собою ясно, что такого рода систематизация дает гораздо больше, чем простое „заучивание" определений, „строгих" доказательств или готовых схем. Следует особо подчеркнуть, что при изучении геометрии учащиеся должны сами участвовать в накоплении новых фактов, а отнюдь не

получать их всегда в готовом виде; наконец, чрезмерное увлечение схемами тоже вредно.

Отсюда ответственная и сложная задача преподавателя: постепенно раскрывать перед учащимися горизонт и научить их видеть и находить определенные соотношения между элементами фигур.

СХЕМА.



Преподаватель, который добросовестно проработал необходимый минимум программы, как бисер нанизывая одно за другим определения, теоремы, выводы, но при этом не указывал учащимся на взаимосвязь между отдельными геометрическими фактами, не приводил все пройденное в систему, — не закончил своей работы. Его учащиеся вряд ли имеют обо всем нужные сведения, едва ли понимают, почему одна теорема следует за другой. Другой преподаватель, который с тою же добросовестностью проработал тот же материал, но при этом указывал в процессе работы и после каждого раздела на взаимосвязь геометрических фактов, давал обобщающие схемы, приводил пройденное в систему, добивается благодаря этому того, что учащимся становится понятным не только весь вопрос в целом, но и значение в определенном месте каждого отдельного факта, необходимого для осознания рассмотренного вопроса. Понятно, что работа второго преподавателя стоит неизмеримо выше работы первого. Без сомнения, способность отдельных людей удерживать в памяти

целые доклады и содержание целых томов в значительной степени можно объяснить и тем, что они обладают способностью правильно и четко систематизировать приобретенные ими знания.

6. Для учащихся систематизация предмета имеет еще то важное значение, что позволяет им нередко делать выводы, которые ранее не были рассмотрены, и часто подводит их к „открытию" новых „проблем".

Однако и в этом вопросе не следует переходить определенных границ. Может случиться, что преподаватель, прекрасно знакомый с той или иной системой, пользуется ею без достаточного учета того, насколько она приемлема для учащихся. Этим отчасти объясняется то обстоятельство, что система Евклида держалась два тысячелетия. Никто из современных преподавателей не пойдет в настоящее время целиком за Евклидом при изложении курса геометрии, многие не станут изучать в начале стереометрии теоремы о положении прямых и плоскостей в пространстве независимо от рассмотрения отдельных тел; наоборот, для этой цели будет использован куб с его сечениями и линиями в нем; чаще преподаватель будет исходить из конкретных примеров действительности, чтобы от них перейти к геометрическим образам, а затем применить полученные теоретические выводы на практике.

Следует иметь в виду, что систематизация возможна лишь при известных предпосылках: во-первых, необходимо накопление достаточного числа фактов — без строительного материала нельзя воздвигнуть здание; преподнести готовую схему учащимся — это все равно, что поместить их в незнакомый большой город, где они могут затеряться в лабиринте домов и улиц; во-вторых, необходимо считаться и с развитием учащихся.

Поэтому систематическому курсу должен предшествовать пропедевтический курс, учитывающий возрастные особенности детского возраста; знакомясь с геометрией в пределах пропедевтического курса, учащиеся накапливают простейшие факты, необходимые для последующей работы.

Указания, относящиеся ко всему курсу геометрии, в равной мере относятся и к каждому занятию по математике: и здесь иногда краткая пропедевтика вопроса должна послужить вступлением, чтобы затем на фоне разобранного частного вопроса доказать рассматриваемое общее положение; наконец, небесполезно доказанное положение иллюстрировать на отдельных ярких примерах.

Примерный разбор избранных тем для самостоятельной работы.

7. Наконец, возможно, хотя бы в порядке кружковой работы, подводить учащихся к отдельным проблемам, не входящим в программу курса геометрии средней школы; ряд таких проблем в дальнейшем приводится; они расширяют кругозор учащихся, показывают, как наблюдательность и умение комбинировать приводят к решению весьма интересных вопросов. Такого рода вопросы могут быть предложены для проработки наиболее талантливым учащимся.

В качестве примера приводим доказательство теорем о вписанном и описанном четырехугольнике и теорем, им обратных, принадлежащих математику Л о н и. Последние обычно доказываются методом от противного; однако имеется крайне простое прямое их доказательство, которое к тому же приводит к вопросу о „замечательных" точках треугольника, число которых значительно.

У Лони теорема гласит:

во всяком вписанном четырехугольнике сумма двух противолежащих углов равна сумме двух других противолежащих углов (рис. 11).

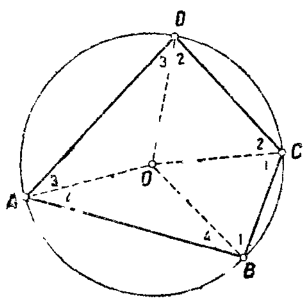


Рис. 11.

Теорему эту в дальнейшем будем называть теоремой о вписанном четырехугольнике.

Когда чертеж выполнен, учащиеся, отыскивая доказательство, из опыта уже знают, что необходимо проведением прямых получить ряд вспомогательных фигур, главным образом треугольников, при помощи которых и можно будет доказать теорему; для получения треугольников используются данные точки — центр окружности и вершины четырехугольника. Соединение прямыми центра окружности с вершинами четырехугольника дает 4 треугольника. Эти треугольники — равнобедренные; отсюда вывод что суммы каждой пары противолежащих углов четырехугольника равны, так как каждая пара противолежащих углов четырехугольника содержит углы *1*, *2*, *3*, *4* треугольников, на которые разбит данный четырехугольник.

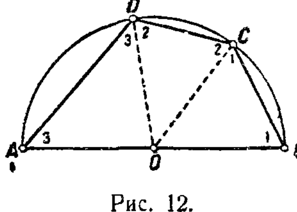


Рис. 12.

Приведенное доказательство следует предпочесть обычному, классическому доказательству, потому что оно, во-первых, позволяет обойтись без теорем об измерении углов в круге и основано исключительно на свойстве равнобедренного треугольника, и, во-вторых, оно аналогично доказательству теоремы об описанном четырехугольнике, у которого сумма одной пары противолежащих сторон равна сумме другой пары противолежащих его сторон.

При доказательстве этой теоремы представляют интерес случаи особого расположения четырехугольника в круге, а именно — случай, когда центр окружности лежит на одной из сторон четырехугольника, и случай, когда центр окружности лежит вне контура четырехугольника.

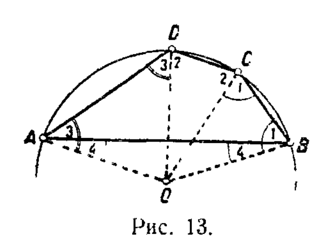


Рис. 13.

Для первого случая доказательство усматривается из рисунка 12; для второго случая, как видно из рисунка 13, сумма каждой пары противолежащих углов равна $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 - \angle 4$.

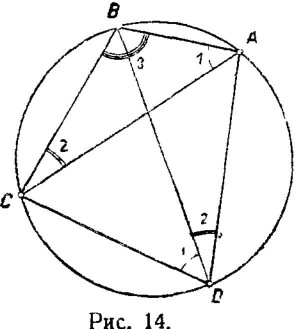


Рис. 14.

Евклид доказал теорему о противолежащих углах на основании свойств вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу, и теоремы: сумма углов треугольника равна двум прямым углам. Если $ABCD$ (рис. 14) — четырехугольник, вписанный в окружность, и AC и

BD—его диагонали, то $\angle BDC = \angle BAC = \angle 1$, $\angle ADB = \angle ACB = \angle 2$.

Но в треугольнике ABC $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 2d$, а потому

$$\angle ADC + \angle ABC = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 2d.$$

8. Сложнее доказательство обратной теоремы. Обратная теорема: **если сумма двух противолежащих углов четырехугольника равна сумме двух других противолежащих его углов, то четырехугольник — вписанный.**

Примерно до 1900 г. полагали, что эта обратная теорема может быть доказана только методом от противного. Однако имеется прямое доказательство; ниже оно приводится.

Следует указать, что приведенная теорема аналогична задаче:

найти точку, отстоящую на одно и то же расстояние от всех четырех вершин четырехугольника, сумма двух противолежащих углов которого равна сумме двух других противолежащих его углов.

Примечание. Все точки находятся на одной плоскости.

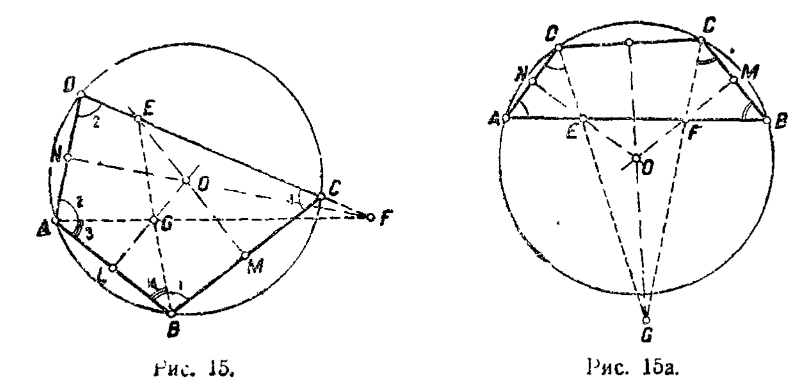


Рис. 15. Рис. 15а.

Решение этой задачи и обоснование правильности сделанного построения укажет учащимся путь доказательства теоремы. Главное же заключается в том, что эта задача аналогична известной учащимся задаче:

найти точку, отстоящую на одно и то же расстояние от всех трех вершин треугольника.

Если так, то, очевидно, и в данном случае следует провести через середины сторон четырехугольника перпендикуляры и доказать, что эти перпендикуляры пересекаются в одной точке.

Итак, дан четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$; требуется доказать, что через его вершины A, B, C и D можно провести окружность и притом только одну (рис. 15).

Доказательство. Проведя медиатрису ME стороны BC, пересекающую сторону DC в точке E, получим равнобедренный треугольник BEC; если затем провести медиатрису NF стороны AD, которая пересечет продолжение стороны DC в точке F, то получим равнобедренный треугольник ADF. Медиатрисы ME и NF пересекутся в точке O, так как они являются биссектрисами треугольника EFG; кроме того и OG — биссектриса угла EGF, а следовательно и угла AGB.

По условию $\angle 1 + \angle 4 + \angle 2 = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3$, отсюда следует, что $\angle 3 = \angle 4$, а потому треугольник AGB — равнобедренный, и его биссектриса GL одновременно является и медиатрисой стороны AB. Итак, медиатрисы сторон AB, BC и AD пересекаются в одной точке, в точке O, удаленной на одинаковое расстояние от вершин четырехугольника $ABCD$, следовательно точка O — центр описанной окружности.

Следует рассмотреть и тот случай, когда точка O пересечения медиатрис оказывается расположенной вне контура четырехугольника $ABCD$. В этом случае (рис. 15а) точка O служит точкой пересечения биссектрис треугольника EFG. Эта точка O, будучи точкой пересечения медиатрис трех сторон четырехугольника, одинаково удалена от всех его вершин.

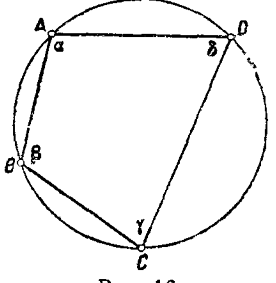


Рис 16.

Теорема о вписанном четырехугольнике и обратная ей теорема имеют много приложений. Из этой теоремы как следствие вытекает теорема о вписанных углах при любом положении сторон угла относительно центра окружности.

В самом деле, если допустить, что три вершины A, B и C вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ (рис. 16) неподвижны, а четвертая вершина D перемещается по окружности, то $\angle\beta$ все время сохраняет свою величину, а потому сохранит свою величину и $\angle\delta$, равный $180° - \beta$; отсюда следует: 1) что все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу ABC, равны между собою и 2) что каждый вписанный угол измеряется половиною дуги, заключенной между его сторонами. Этот вывод верен для любого положения сторон четырехугольника относительно центра окружности. Все же следует иметь в виду, что, если в последнем случае вывод и не требует рассмотрения трех случаев, как это имеет место при обычном доказательстве, когда рассматривают три различные положения сторон вписанного угла относительно центра окружности, то теорема, из которой сделан вывод, была рассмотрена для трех различных случаев четырехугольника в круге.

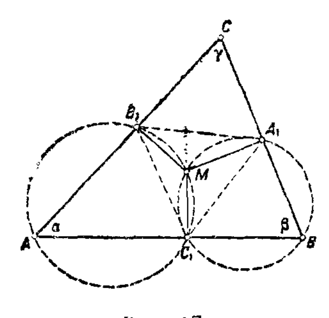


Рис. 17.

9. Теоремы о вписанном четырехугольнике и ей обратная позволяют обосновать еще и другие предложения.

Пусть дан треугольник ABC (рис. 17), на каждой из сторон которого взято по одной произвольной точке, положим точки A_1, B_1 и C_1. Если соединить эти 3 точки прямыми, то треугольник ABC разобьется на 4 треугольника: один „внутренний“ треугольник $A_1B_1C_1$ и 3 „внешних“ треугольника. Если предложить учащимся затем провести окружности через вершины каждого из внешних треугольников, то они „увидят“, что все три окружности пересекаются в одной точке — в точке M.

Чтобы это доказать, проведем сперва окружности через вершины двух треугольников, положим треугольников A_1BC_1 и AB_1C_1; эти окружности пересекутся в точке C_1 — общей их вершине — и в точке M.

Соединив точку M с точками A_1, B_1 и C_1, получим три четырехугольника, из которых два четырехугольника: A_1BC_1M и AB_1MC_1 — вписанные.

Если теперь доказать, что и третий четырехугольник, A_1CB_1M — вписанный, то тогда будет доказано, что окружность, описанная около треугольника $A_1B_1C_1$, пройдет через точку M; последнее возможно, если $\angle C + \angle A_1MB_1 = 180°$. Докажем, что это имеет место.

На самом деле

$$\angle B_1MC_1 = 180° - \alpha \quad \text{и} \quad \angle C_1MA_1 = 180° - \beta,$$

следовательно

$$\angle A_1MB_1 = 360° - (180° - \alpha) - (180° - \beta) = \alpha + \beta,$$

а потому

$$\angle A_1MB_1 + \angle C = \alpha + \beta + \gamma = 180°,$$

а это указывает на то, что окружность, проходящая через точки A_1, B_1 и C_1, проходит также и через точку M. Итак:

если в данный треугольник вписать другой произвольный треугольник, вершины которого лежат на сторонах данного треугольника, то три окружности, проходящие через вершины внешних треугольников, пересекаются в одной точке.

Рассмотрим еще более общий вопрос. Пусть дан произвольный треугольник ABC (рис. 18), углы которого α, β и γ. На стороне AB построен произвольный треугольник ABC_1, углы которого α_1, β_1, γ_1. На сторонах BC и AC построены треугольники BCA_1 и ACB_1, подобные треугольнику ABC_1, так, что стороны данного треугольника ABC не являются сходственными сторонами внешних треугольников; затем проведены описанные окружности через вершины каждого из внешних треугольников. Доказать, что эти окружности пересекаются в одной точке.

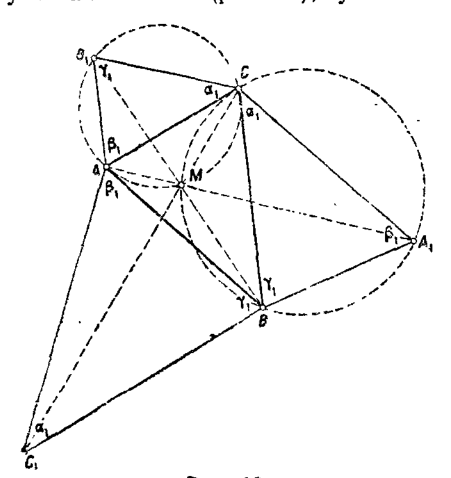


Рис. 18.

Прежде всего следует заметить, что $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 180°$. Проводим окружности через вершины B, C и A_1, а также через вершины A, C и B_1. Пусть они пересекаются в точке M. Таким образом остается только еще доказать, что окружность, проведенная через вершины треугольника ABC_1, также пройдет через точку M, или, что то же, четырехугольник AC_1BM — вписанный.

$\angle CMB = 180° - \beta_1$ и $\angle CMA = 180° - \gamma_1$, ибо четырехугольники A_1BMC и AB_1CM — вписанные, следовательно:

$$\angle AMB = 360° - (180° - \beta_1) - (180° - \gamma_1) = \beta_1 + \gamma_1,$$

а потому

$$\angle AMB + \angle AC_1B = \beta_1 + \gamma_1 + \alpha_1 = 180°,$$

т. е. четырехугольник AC_1BM — вписанный, а это значит, что окружность, проведенная через вершины треугольника ABC_1, пройдет через точку M.

Нетрудно также убедиться, что угол $AMB_1 = \alpha_1$, ибо он опирается на дугу AB_1, на которую опирается и $\angle ACB_1 = \alpha_1$, а потому

$$\angle AMB_1 + \angle BMA = \beta_1 + \gamma_1 + \alpha_1 = 180^\circ$$

и, таким образом, AMA_1 — прямая. Таким же образом мы убеждаемся, что BMB_1 и CMC_1 — прямые и все эти прямые пересекаются в точке M, точке пересечения окружностей.

После этого сами учащиеся могут взять частный случай предыдущей задачи, а именно — случай, когда $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 60^\circ$, т. е. построить на каждой из сторон произвольно взятого треугольника ABC по равностороннему треугольнику (рис. 18а). Эти равносторонние треугольники также подобны, и потому для них можно привести такое же доказательство. В этом случае углы AMB, BMC и CMA все равны, и каждый из них равен 120°, ибо углы AC_1B, BA_1C и CB_1A равны каждый 60°. Значит, из точки M все три стороны треугольника ABC видны под одним и тем же углом.

Произвольный выбор треугольника ABC_1, построенного на стороне AB данного треугольника ABC, показывает, что „замечательных" точек в любом треугольнике очень много. Точки пересечения: медиан — центр тяжести, биссектрис — центр вписанной окружности, медиатрис — центр описанной окружности и высот — ортоцентр, таким образом, являются не единственными четырьмя „замечательными" точками.

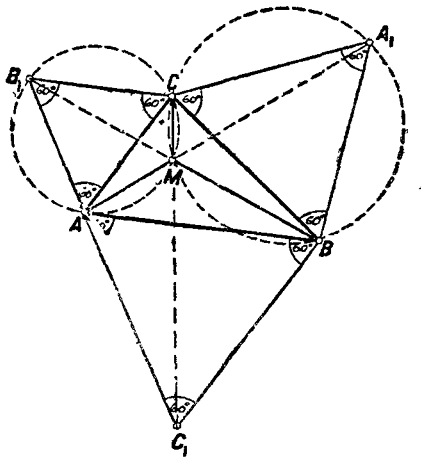


Рис. 18а.

Возвращаясь к разобранному частному случаю, когда на сторонах треугольника построены правильные треугольники (рис. 18а), заметим, что точка M пересечения окружностей, построенных на внешних треугольниках, есть в то же время и точка пересечения прямых AA_1, BB_1 и CC_1.

Математик Ферма (1601—1665) назвал эту точку „точкой наименьших расстояний от вершин". Ферма сообщил об этой задаче своему другу Торичелли (1608—1647), который, в свою очередь, сообщил о ней Вивиани (1622—1703); последний дал несколько различных доказательств построения этой точки; среди приведенных доказательств было и доказательство способом построения равносторонних треугольников.

Допустим, что искомая точка M в треугольнике ABC указанным выше способом найдена, и соединим ее с вершинами A, B и C треугольника ABC (рис. 19). Проведем через вершины A, B и C треугольника ABC прямые, перпендикулярные к AM, BM и CM до их взаимного пересечения; получим треугольник $A_2B_2C_2$. Из четырехугольника A_2BMC находим, что

$$\angle A_2 = 360^\circ - \angle A_2CM - \angle A_2BM - \angle BMC = \\ = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Точно так же из четырехугольников $AMCB_2$ и $AMBC_2$ найдем, что $\angle B_2 = 60^\circ$ и $\angle C_2 = 60^\circ$ и треугольник $A_2B_2C_2$, таким образом, равносторонний.

Теперь нетрудно доказать, что сумма расстояний $MA + MB + MC$ точки M от вершин треугольника меньше суммы расстояний любой другой точки N внутри контура до тех же вершин, т. е.

$$NA + NB + NC > MA + MB + MC.$$

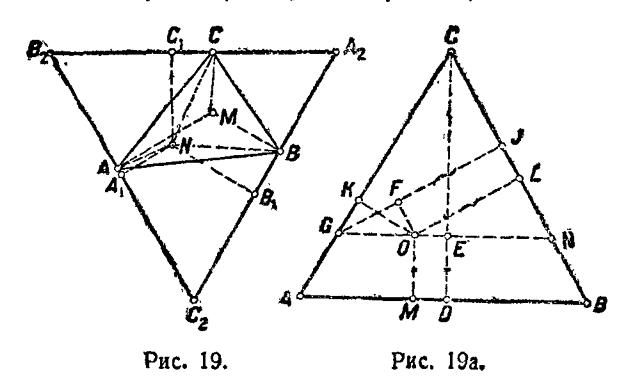


Рис. 19. Рис. 19а.

В самом деле, если провести из произвольной точки N перпендикуляры NA_1, NB_1 и NC_1 к сторонам B_2C_2, C_2A_2 и A_2B_2 треугольника $A_2B_2C_2$, то сумма этих расстояний $NA_1 + NB_1 + NC_1$, равно как и сумма $MA + MB + MC$, равна высоте треугольника $A_2B_2C_2$.

$$NA_1 + NB_1 + NC_1 = MA + MB + MC = h,$$

где h — высота треугольника $A_2B_2C_2$. Но

$$NA_1 < NA, \quad NB_1 < NB, \quad NC_1 < NC,$$

и, следовательно,

$$NA_1 + NB_1 + NC_1 < NA + NB + NC,$$

а потому и

$$MA + MB + MC < NA + NB + NC,$$

и точка M — „точка наименьших расстояний".

Указание. Что сумма расстояний любой точки O внутри контура равностороннего треугольника от сторон треугольника равна высоте h треугольника, видно из рисунка 19а.

$$CD = CE + ED = GI + OM = GF + FI + OM = OK + OL + OM,$$

причем $GN \parallel AB$ и треугольник GCN — равносторонний; в нем $CE = GI$, кроме того $\triangle GOK = \triangle OGF$ и $OK = GF$.

Если учащиеся знакомы с выражением площади треугольника через его основание и высоту $S = \frac{1}{2}ah$, то доказательство это значительно упрощается. В самом деле, соединив точку M с вершинами A_2, B_2 и C_2 (рис. 19), разобьем треугольник $A_2B_2C_2$ на три треугольника: MA_2B_2, MB_2C_2 и MC_2A_2, сумма площадей которых равна площади треугольника $A_2B_2C_2$:

$$\frac{A_2B_2 \cdot MC}{2} + \frac{B_2C_2 \cdot MA}{2} + \frac{C_2A_2 \cdot MB}{2} = \frac{A_2B_2 \cdot h}{2},$$

откуда

$$MC + MA + MB = h,$$

ибо

$$A_2B_2 = B_2C_2 = C_2A_2.$$

Если в построенных выше на сторонах треугольника ABC (рис. 18) подобных треугольниках установить связь углов $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ с углами α, β, γ данного треугольника ABC, то можно получить некоторые „замечательные" точки треугольника.

Так, например, если $\beta_1 = \alpha$, $\gamma_1 = \beta$ и $\alpha_1 = \gamma$, то построенная указанным способом точка M будет не чем иным, как ортоцентром.

При $\beta_1 = \beta + \gamma - \alpha$, $\gamma_1 = \gamma + \alpha - \beta$ и $\alpha_1 = \alpha + \beta - \gamma$ точка M будет центром описанной окружности.

При $\beta_1 = 90^\circ - \alpha$, $\gamma_1 = 90^\circ - \beta$ и $\alpha_1 = 90^\circ - \gamma$ точка M будет центром вписанной окружности.

Наконец, при $\beta_1 = \beta$, $\gamma_1 = \gamma$ и $\alpha_1 = \alpha$, при $\beta_1 = \gamma$, $\gamma_1 = \alpha$ и $\alpha_1 = \beta$ получаются две „замечательные" точки, так называемые точки Брокара (рис. 20 и 20а).

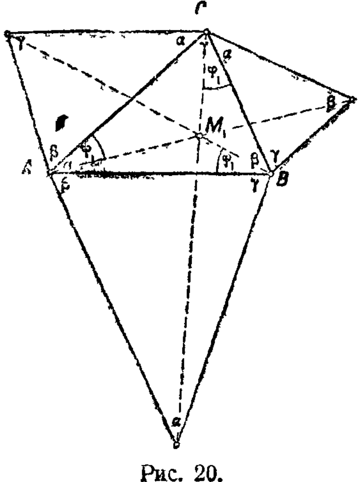


Рис. 20.

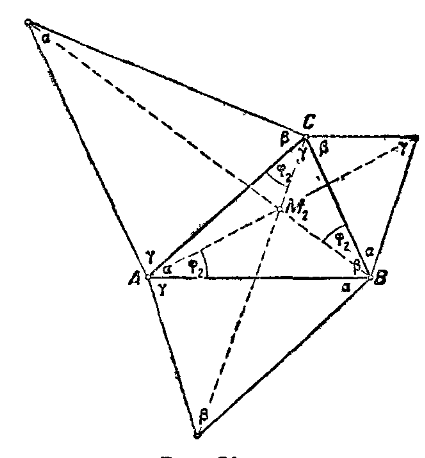


Рис. 20а.

Положение точек Брокара M_1 и M_2 в треугольнике ABC обусловливается следующими равенствами:

$$\angle M_1AC = \angle M_1BA = \angle M_1CB = \varphi_1$$

и

$$\angle M_2AB = \angle M_2BC = \angle M_2CA = \varphi_2.$$

Заметим, между прочим, что между углами α, β и γ треугольника ABC (рис. 20) и углом φ_1 существует равенство:

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma = \operatorname{ctg} \varphi_1.$$

Само собою ясно, что вывод этого равенства должен быть отнесен к занятиям по тригонометрии.

Хотя вопросы, связанные с рассмотрением указанных выше „замечательных" точек треугольника и не входят в элементарный курс геометрии и относятся к новейшей геометрии треугольника, тем не менее следует

время от времени делать экскурс и в область, выходящую за пределы обычного школьного курса, знакомя на кружковых занятиях учащихся, вполне справляющихся с текущей работой по геометрии, и с некоторыми новыми проблемами; при этом необходимо следить за тем, чтобы подобного рода занятия отнюдь не шли в ущерб выполнению плана классных программных работ.

10. Приводим еще доказательство, относящееся к описанному четырехугольнику, которое дано математиком Лони; по своей простоте оно вполне доступно учащимся и может служить темой для доклада в кружке.

Теорема. **В любом выпуклом четырехугольнике, стороны которого по порядку равны *a*, *b*, *c* и *d* и связаны между собой равенством $a+c=b+d$, существует точка, равноудаленная от его сторон, другими словами, в такой четырехугольник можно вписать окружность.**

При доказательстве не пользоваться методом доказательства от противного.

Иная формулировка теоремы:

биссектрисы четырехугольника, суммы противолежащих сторон которого равны, пересекаются в одной точке.

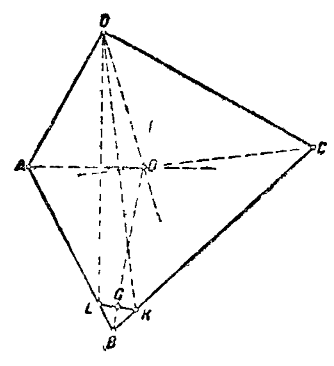


Рис. 21.

Итак, дан четырехугольник $ABCD$ (рис. 21), в котором $AD+BC=DC+AB$. Требуется доказать, что в данный четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

Доказательство. Проводим биссектрису CO угла DCB и из вершины D — прямую DK, перпендикулярную к CO, до пересечения в точке K со стороною CB; получится равнобедренный треугольник DCK, в котором CO — медиатриса стороны DK.

Если провести биссектрису AO угла BAD и прямую DL, перпендикулярную к AO, то получится равнобедренный треугольник DAL, в котором AO — медиатриса стороны DL.

Соединив затем точки L и K, получим треугольник DLK.

Согласно условию $AD+CK+KB=DC+AL+LB$, но $AD=AL$ и $CK=CD$, а потому $KB=LB$; последнее указывает на то, что треугольник KBL — равнобедренный и что биссектриса BG — медиатриса стороны LK. Но медиатрисы треугольника DLK пересекаются в одной точке, следовательно и биссектрисы AO, BO и CO четырехугольника $ABCD$ также пересекаются в одной точке O. Эта точка O отстоит на одинаковое расстояние от всех сторон данного четырехугольника и тем самым является центром вписанной окружности.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Г. Вилейтнер, Хрестоматия по истории математики, вып. II, М., 1932.
2. Ф. Кэджори, История элементарной математики, Одесса, 1910.
3. Г. Цейтен, История математики в древности и в средние века, М., 1932.
4. Евклид, Начала:

а) евклидовых „Начал" восемь книг, а именно: первые шесть, одиннадцатая и двенадцатая, содержащие в себе основания геометрии, пер. с греческого Ф. Петрушевского, СПБ, 1819;

б) „Начала“ Евклида с пояснительным введением и толкованиями М. Е. Ващенко-Захарченко, Киев, 1880.

1. В. Лебедев, Кто автор первых теорем геометрии? М., 1916.
2. В. Лебедев, Знаменитые геометрические задачи древности, М., 1917.
3. Е. Фурре, Очерк истории элементарной геометрии, Одесса, 1912.

1. Ф. Энгельс, Диалектика природы, М., 1931.
2. Ф. Энгельс, Анти-Дюринг, М., 1931.

1. В. Беллюстин, Очерки по методике геометрии, М., 1912.
2. Н. Извольский, Методика геометрии, П., 1924.
3. В. Мрочек и Ф. Филиппович, Педагогика математики, П., 1910.
4. М. Симон, Дидактика и методика математики в средней школе, 2-е изд., П., 1917.
5. П. Трейтлейн, Методика геометрии, ч. I, П., 1912; ч. II, П., 1913.
6. Д. Юнг, Как преподавать математику, вып. I—II, П., 1922.
7. Математика в школе. Сборники № 1—6, изд. Ленингр. губоно, 1924—1926.
8. Методическое руководство и программы для рабфаков, „Математика“, М., 1925.
9. Сборник программ и инструкций по преподаванию математики в Западной Европе, под ред. проф. Д. М. Синцова, М., 1914.
10. Труды Первого всероссийского съезда преподавателей математики, т. I, II, III, СПБ, 1913.
11. Доклады, читанные на Втором всероссийском съезде преподавателей математики, М., 1915.
12. Дневник Второго всероссийского съезда преподавателей математики, № 1—10, М., 1914.

1. Tropfke I., Geschichte der Elementarmathematik, Berlin und Leipzig, 1923.
2. Lietzmann W., Methodik des mathematischen Unterrichts, Leipzig, 1926.
3. Birkemeyer W., Ueber den Bildungswert der Mathematik, Leipzig, 1923.
4. Maennchen Ph., Mathematik; Methodik des mathematischen Unterrichts, Frankfurt a/M, 1928.
5. Rose G., Die Schulung des Geistes durch den Mathematikunterricht, Leipzig, 1928.

II. ВОПРОСЫ ЧАСТНОЙ МЕТОДИКИ ГЕОМЕТРИИ.

§ 6. Основные геометрические образы.

1. Учащиеся, приступая на 6-м году обучения к проработке систематического курса геометрии, уже владеют некоторым запасом геометрических знаний; знания эти по преимуществу почерпнуты или непосредственно из опыта или восприняты ими интуитивно, путем сопоставления ряда аналогичных и уже знакомых им геометрических фактов.

2. На первых своих занятиях с учащимися по геометрии преподаватель, выяснив, каковы их знания по геометрии, их умение: 1) „видеть" форму предмета, 2) давать четкую формулировку своей мысли, 3) записывать знакомую им формулу, 4) выполнять чертеж, 5) решать несложную задачу на вычисление, — должен уделить внимание выяснению отличия геометрического тела от физического. Определение геометрического тела как абстракции, как отражения пространственной формы материального тела трудно воспринимается учащимися; дается определение: *геометрическое тело есть ограниченная часть пространства, занимаемая физическим телом.*

Следует привести пример различного подхода к оценке одного и того же предмета в зависимости от его свойств. Так, к оценке участка земли различно подойдут агроном, геолог, инженер-строитель, землемер-геометр. Первого интересует почва участка, возможность использовать участок для посева тех или иных злаков; второго — в первую очередь недра земли, возможность найти в них полезные ископаемые; третьего — пригодность участка для возведения построек, его близость к путям сообщения и т. п.; землемера-геометра — форма и размеры участка.

Показом и рассмотрением вместе с учащимися тел одинаковой формы, например куба чугунного, стеклянного, деревянного, сделанного из кости или склеенного из картона, учащимся разъясняется, что они как геометры должны приобрести навык обращать внимание не на физические свойства тела, а лишь на его ф о р м у, на форму отдельных его частей.

3. При определении геометрического тела необходимо подчеркнуть, что в действительности форма неотделима от присущих телу свойств и что геометрия, изучая форму тела, отвлекает ее от действительного тела из окружающего пространства, чтобы, выяснив особенности той или иной формы геометрического тела и присущие ему свойства, использовать затем эти знания в применении к физическому телу в реальной действительности, в технике, в производстве.

4. Для выяснения понятия границы тела — поверхности — можно проделать такой опыт: наполнить прозрачный сосуд, лучше всего — кубической формы, три измерения которого „видны" учащимся, на одну треть водою (подкрашенной), затем подлить в него немного растительного масла или керосина (рис. 22); вода не смешивается ни с растительным маслом, ни с керосином, а потому граница, отделяющая воду от масла или керосина, четко выделяется. На этом опыте учащиеся могут убедиться, что граница, отделяющая воду от масла или керосина, не принадлежит ни воде, ни маслу или керосину, что она не имеет толщины, а только — длину и ширину.

Чтобы дать учащимся представление о линии как о границе поверхности, можно проделать следующий опыт: опустить полоску плотной белой бумаги в чернила; чернила окрасят одну часть полоски, другая же ее часть останется белой (рис. 23); границей окрашенной части и неокрашенной, т. е. белой части полоски, будет некоторая линия, которая, с одной стороны, принадлежит как бы обеим частям полоски, с другой же — не принадлежит ни той, ни другой. Разъясняется, что линия не имеет толщины, а лишь одно измерение — длину.

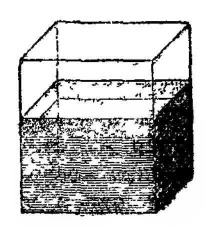


Рис. 22.

Рис. 23.

Для иллюстрации примеров линий, являющихся границей поверхности, следует использовать географическую карту и обратить внимание учащихся на береговые линии, а также на границы смежных республик, областей и районов.

Конец или граница линии — точка; точка не имеет ни одного измерения.

Хотя роль опыта и заключается в том, чтобы помочь интуиции учащегося дать толчок его воображению и тем самым содействовать уяснению им определенных геометрических понятий, все же не следует увлекаться постановкой опытов.

Опыт в геометрии ничего не доказывает, — он только показывает, грубо иллюстрирует то или иное отвлеченное понятие.

5. Надо помнить, что учащимся на первых порах нелегко дается вполне отчетливое и осознанное понимание того, что такое поверхность, линия, точка, которые являются тем материалом, над которым работает геометрия. Эти геометрические образы — границы тел, поверхностей и линий — становятся понятными и близкими учащимся лишь постепенно, по мере развития их пространственных представлений.

6. Следует пояснить учащимся, что из бесчисленного множества самых разнообразных поверхностей, зависящих от формы тела, а также из бесчисленного множества самых разнообразных линий в курсе элементарной геометрии рассматриваются простейшие геометрические образы.

Такими простейшими геометрическими образами являются, как показывают наблюдение и опыт, кроме точки, прямая линия и плоскость, из кривых линий — окружность, из числа кривых поверхностей — цилиндрическая, коническая и сферическая поверхности.

Понятно, что давать учащимся названия отдельных кривых поверхностей на первых порах не следует; можно ограничиться показом моде-

лей тел с кривыми поверхностями и указанием, что поверхности, отличные от плоскости, — поверхности кривые.

Понятие о кривой линии должно быть вскрыто путем сопоставления кривой линии с прямою. Кривая линия — линия, не содержащая ни одного отрезка прямой. Линия, состоящая из частей кривой линии и отрезков прямой, — смешанная линия.

Понятие о плоскости следует дать в связи с опытной проверкой полного совмещения с нею в любом направлении прямой линии. Аналогично дается также и понятие о кривой поверхности, с которой приложенная к ней прямая линия или не совмещается или если и совмещается, то не во всех направлениях, а лишь при определенном направлении прямой.

Необходимо указать учащимся, что линии, поверхности и тела могут быть получены движением. Так, можно рассматривать линию как след непрерывно перемещающейся в пространстве точки; поверхность — как след перемещающейся линии; представление о поверхности дают спицы быстро вращающегося колеса, которые как бы сливаются воедино.

Наконец, движением поверхности может быть образовано тело. Так, быстро вращающаяся монета, поставленная на ребро, вызывает в глазу представление о шаре.

Для показа получающихся быстрым вращением геометрических образов — линии, поверхности, тела — может быть использована центробежная машина.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Какому из двух тел — воде или льду — принадлежит поверхность, отделяющая воду от льда? Какова толщина этой поверхности, ее длина, ширина?

2. В стакан с водой опущен карандаш. Что служит границей, отделяющей поверхность той части карандаша, которая опущена в воду, от поверхности той части, которая находится вне воды? Имеет ли эта граница толщину, ширину и длину?

3. Часть белого листа бумаги закрашена красной или иной краской. Что служит границей, отделяющей закрашенную часть листа от незакрашенной? Принадлежит ли эта граница закрашенной части листа или незакрашенной? Имеет ли эта граница толщину, ширину и длину?

4. Линия рассматривается как след непрерывно перемещающейся точки. Привести примеры из техники и природы.

§ 7. Прямая.

Понятие о прямой.

1. Учащимся указывается, что прямую линию как и всякую другую линию, можно наблюдать только на телах, что прямая самостоятельно не существует; одновременно поясняется, что если в геометрии все же говорят о линиях, точках и поверхностях как о чем-то самостоятельном, то потому, что их представляют себе отделенными от тел, как бы снятыми с них и лишенными физических свойств, присущих телам. Туго натянутая нить, острое ребро кристалла, путь солнечного луча, пробивающегося через небольшое отверстие в темную комнату, дают представление о прямой.

Не лишне указать учащимся, что прямая, начерченная мелом на доске или карандашом на листе бумаги, по сути дела не является прямой в геометрическом смысле и есть тело, состоящее из мельчайших частиц мела или графита.

Начерченная „прямая“ есть лишь „изображение“ прямой. Дать определение прямой нельзя: понятие о прямой, как и понятия о точке и плоскости, — понятия элементарные, основные, т. е. такие, которые при помощи каких-либо других, более простых понятий не могут быть определены; понятие о прямой человек получает непосредственно из жизненного опыта. К элементарным понятиям относятся также такие понятия, как едииица, время, пространство, направление и др.

Понятие о прямой вскрывается учащимся рассмотрением ее свойств.

2. Преподаватель должен знать, что нередко делались попытки дать определение основным геометрическим понятиям; однако разбор этих определений указывает, что они или отмечают частично свойства определяемых основных геометрических образов или вводят в определения понятия, которые не являются основными и, следовательно, сами еще подлежат определению. Следует иметь в виду, что основные образы — это те образы, из которых конструируются другие.

„Прямая есть линия, которая одинаково лежит относительно всех своих точек“, — таково определение прямой, данное в „Началах“ Евклидо́м. Этим определением Евклид как бы делает попытку описать форму прямой в пространстве, данную опытом; это определение не имеет „геометрического“ значения; ему удовлетворяет и окружность.

Платон (429—348 гг. до нашей эры) определяет прямую как линию, „которой середина заслоняет края“, т. е. как путь светового луча. Но что такое путь светового луча? Несомненно, что на подобное определение прямой линии Платона должно было навести наблюдение над провешиванием прямых, когда между двумя вехами A и B располагают ряд других вех таким образом, чтобы они покрывали друг друга (рис. 24).

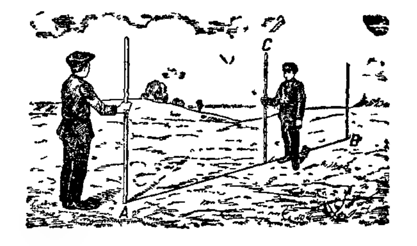


Рис. 24.

Грассман (1809—1877) определяет прямую как линию постоянного направления. Но тогда возникает вопрос, что̀ понимать под постоянным направлением.

Определение прямой: кратчайший путь между двумя точками — приписывается Архимеду (287—212 гг. до нашей эры); оно, в свою очередь, предполагает понятие о длине, по крайней мере понятие о линейном элементе, и, следовательно, уже содержит в себе понятие о прямой линии.

Аксиомы прямой.

3. Первая аксиома прямой: **прямая может быть безгранично продолжена в обе стороны.**

Дается указание, как на ограниченной части плоскости вычерчивается и обозначается прямая. Следует показать учащимся, как прикладыванием края линейки к двум точкам и проведением прямой вдоль края линейки прямая может быть неограниченно продолжена в обе стороны. Затем рассматривается фигура, состоящая из двух элементов — из прямой и точки.

Проводится прямая MN и на ней берется точка A. Эта точка делит прямую на две части, на два луча AM и AN, из которых каждый безгранично тянется от точки A лишь в одну сторону (рис. 25).

Таким образом *луч есть прямая, ограниченная с одной стороны*, и точка A, из которой выходит луч, — начало луча.

Два луча с общим началом, составляющие одну прямую, называются **взаимно противоположными**.

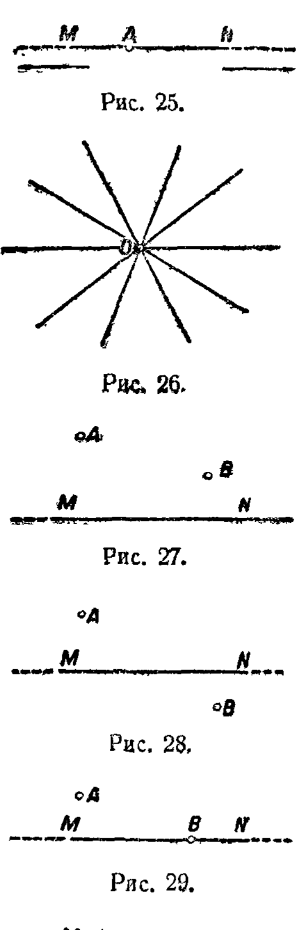


Рис. 25.

Рис. 26.

Рис. 27.

Рис. 28.

Рис. 29.

Рис. 30.

Рис. 31.

После этого следует взять где-либо на плоскости точку O, провести через нее несколько прямых и дать учащимся понятие о пучке прямых (рис. 26). Учащиеся убеждаются, что через одну точку можно провести бесчисленное множество прямых.

Вслед за этим необходимо остановиться на геометрической фигуре, состоящей из прямой и двух точек, и рассмотреть различные случаи расположения точек относительно прямой:

1) точки A и B лежат по одну сторону прямой MN (рис. 27);

2) точки A и B лежат по обе стороны от прямой MN (рис. 28);

3) точка A лежит вне прямой, точка B лежит на прямой MN (рис. 29);

4) точки A и B лежат на прямой MN (рис. 30).

Обращается внимание учащихся на то, что в последнем случае точки A и B как бы делят прямую MN на три участка: на два луча AM и BN и часть прямой, заключенную между данными на ней двумя точками A и B. Этой части прямой дается название — **отрезок**.

Отрезок — часть прямой, ограниченная с двух сторон. Поясняется, что через две данные точки можно провести только одну прямую, что всякая другая прямая, проходящая через те же две данные точки, совместится с первой прямой.

Отсюда — вторая аксиома прямой: **через две различные точки можно провести прямую и притом только одну.**

Выясняется, что **положение прямой определяется двумя различными точками**, и указывается, что наличие двух различных точек есть условие, **достаточное** для определения положения прямой.

Дается понятие о ломаной как линии, составленной из отрезков прямой, не расположенных на одной прямой.

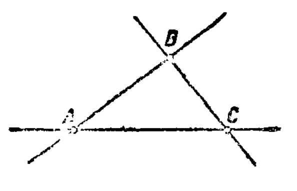
Вслед за тем проводят через данные две точки A и B ряд различных линий: прямую, ломаную, кривую (рис. 31) и поясняют, что из всех линий, концами которых служат данные точки A и B, отрезок прямой является кратчайшим путем между этими точками, $AB < AMB$ и $AB < ANB$.

Отсюда — третья аксиома прямой: **отрезок прямой есть кратчайший путь между двумя точками.** В справедливости этой аксиомы до нас убеждались, да и мы убеждаемся из жизненного опыта.

4. Рассмотрение свойств прямой, формулировка ее свойств в виде аксиом дают повод остановиться в этом месте курса на разъяснении учащимся понятия об аксиоме. Для выяснения существующих взглядов на аксиомы мы отсылаем преподавателя к книгам Энгельса: „Диалектика природы", 1931 г., стр. 7—8 и „Анти-Дюринг", 1931 г., стр. 32—35 и к книге Юнга „Как преподавать математику", М., 1924 г., стр. 138—144.

В средней школе, в самом начале систематического курса, аксиому следует определить как суждение о самых общих свойствах фигуры, которые установлены из опыта и которые мы принимаем без доказательства.

„Математически, — говорит Энгельс, — они (т. е. аксиомы) недоказуемы. Они доказуемы диалектически, поскольку они не чистые тавтологии". Доказать диалектически — значит, что их можно доказать, обратившись к их источнику, к реальному миру, другими словами — выйти за пределы самой математики, ибо в этих пределах „математически" их доказать нельзя. Вполне понятно, что наблюдение, опыт, решение всякого рода практических задач, выдвигаемых самой жизнью, имели главным образом решающее значение в установлении аксиом в математике.



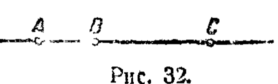


Рис. 32.

Следует отметить, что аксиомы, установленные Евклидом, заимствованы в основном из практики, и выводы из них, не раз проверенные на опыте и закрепленные практикой, уже не требуют для нас специального опытного подтверждения, кажутся нам самоочевидными, само собою разумеющимися.

Действия с отрезками.

5. В качестве задачи полезно предложить учащимся провести всевозможные прямые через три данные точки *A*, *B* и *C*, рассмотрев и тот случай, когда через эти точки можно провести только одну прямую (рис. 32).

Учащиеся убеждаются, что три различные точки, не лежащие на одной прямой, определяют положение трех прямых, а потому для них должно быть ясно и то, что наибольшее число прямых, определяемых тремя точками, — три.

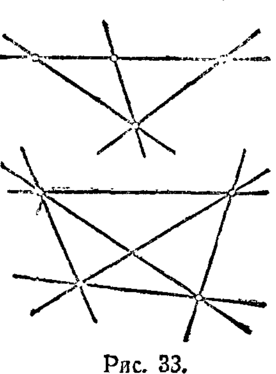


Рис. 33.

На вопрос преподавателя, какое наибольшее число прямых определяется четырьмя точками, можно ожидать со стороны учащихся непродуманного, а потому и неверного ответа: „четыре прямые".

Не следует сразу заявлять учащемуся, что данный им ответ неверен, необходимо заставить его тут же внимательно разобраться и проверить при помощи чертежа, верен ли данный им ответ.

Следует предложить учащемуся сделать чертеж, как указано на рисунке 33.

В первом случае все 4 точки лежат на одной прямой, и, следовательно, данные 4 точки определяют одну прямую; во втором случае из четырех точек 3 лежат на одной прямой, и при таком расположении

данных точек можно провести 4 прямые; наконец, в третьем случае, когда не более двух точек лежат на одной прямой, через 4 данные точки можно провести шесть прямых.

Итак, наибольшее число прямых, которые можно провести через 4 точки на плоскости, — шесть.

После такого разбора полезно предложить учащимся рассмотреть, сколько прямых можно провести через 5 различных точек в зависимости от их взаимного расположения.

Учащиеся, выполняя необходимые построения, убеждаются, что через 5 различных точек можно провести или 1, или 5, или 8, или 10 определенных прямых (рис. 34 и 35).

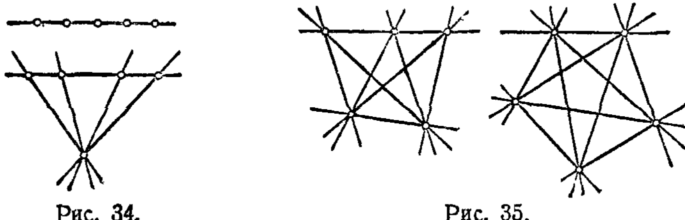


Рис. 34. Рис. 35.

Укажем, что можно расположить данные 5 точек и так, как дано на рисунках 36 и 37. В этом случае имеются две прямые, на которых лежат по три точки из данных пяти. Понятно, что при таком расположении точек можно провести только 6 различных прямых.

Точно таким же образом 6 различных точек дают 1, 6, 10, 13 или 15 прямых и т. д.

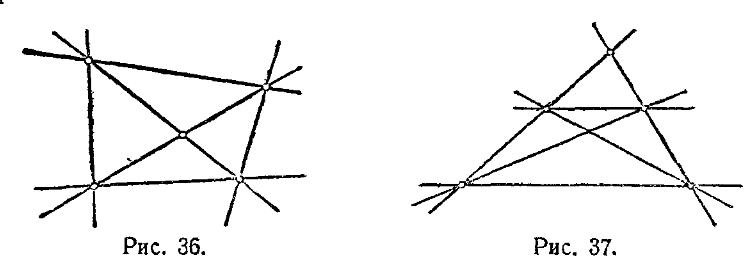


Рис. 36. Рис. 37.

Укажем для преподавателя общую формулу, по которой определяется наибольшее число S прямых, проходящих через n точек, из которых никакие 3 не лежат на одной прямой:

$$S = (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1$$

или

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1).$$

Это есть сумма разностной прогрессии, первый член которой $u_1 = 1$, последний член $u_{n-1} = n - 1$ при числе членов $n - 1$, откуда

$$S = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Так, для $n = 12$ имеем

$$S = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66;$$

для $n = 3$ имеем

$$S = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3.$$

Получение последней формулы, по которой определяется наибольшее число прямых, которые можно провести через данное число n различных точек, может быть объяснено следующим образом.

Из одной точки к остальным $(n-1)$ точкам можно провести $(n-1)$ прямых, из второй точки — также $(n-1)$ прямых, следовательно из n точек можно провести $n(n-1)$ прямых. При таком подсчете, однако, каждая прямая, проходящая через две какие-либо точки, учитывалась два раза, а потому нужно произведение $n(n-1)$ разделить на 2, получим:

$$S=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Для иллюстрации того, что вопрос о наибольшем числе прямых, которые можно провести через n точек, имеет практическую значимость, можно указать учащимся на проводку прямых проводов без промежуточных передач между n городами. Так, между столицами советских республик Союза числом 7 должно быть $\frac{7\cdot 6}{2}=21$ прямых проводов.

Интересно предложить учащимся и такую задачу: сосчитать, как велико будет число рукопожатий, которыми обменяются учащиеся, если, придя утром в класс, они все поздороваются друг с другом. Понятно, что одно рукопожатие двух лиц соответствует как бы проведению одной прямой через две точки. Поэтому, если в классе 30 учащихся, то общее число рукопожатий будет $\frac{30\cdot 29}{2}=435$. Учащиеся навряд ли ожидают, что число рукопожатий выражается таким большим числом. Эта задача может быть использована преподавателем в санитарно-гигиенических целях. Указав, что при рукопожатии есть опасность перенесения заразы, он предлагает им подумать, не целесообразно ли отказаться от рукопожатий и последовать примеру пионеров, здоровающихся поднятием руки.

Подобного рода задачи должны содействовать развитию пространственных представлений учащихся и показать им, что различные сочетания простейших основных геометрических образов дают различные фигуры.

Не менее важная задача данного раздела — научить учащихся пользоваться *линейкой и циркулем, уметь „взять" отрезок в циркуль, отложить* его на произвольной прямой, сравнивать отрезки между собою путем наложения одного отрезка на другой.

Необходимо, чтобы учащиеся приобрели прочные навыки не только в выполнении действий с отрезками, в записи выполняемых ими действий, но и в четкой формулировке, как выполняется наложение одного отрезка на другой и действия с отрезками. Это существенно важно для всей дальнейшей работы, особенно при доказательстве признаков равенства треугольников. При выполнении действий с отрезками следует приучать учащихся давать четкие и опрятные чертежи, соответствующие данным задачи и выбранному масштабу.

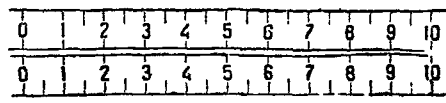


Рис. 38.

6. Можно показать учащимся выполнение действия сложения и вычитания отрезков при помощи двух масштабных линеек, которые могут быть изготовлены самими учащимися из миллиметровой бумаги (рис. 38).

Так, если надо сложить два отрезка, $a=64$ *см* и $b=68$ *см*, а затем начертить их сумму, то, приняв масштаб 1:10, учащийся прикладывает к делению 6,4 *см* одной масштабной линейки (рис. 39) нулевое деление второй

масштабной линейки и отмечает на первой то деление, которое соответствует делению 6,8 *см* на второй, т. е. деление 13,2 *см*.

Аналогично выполняется и вычитание отрезков.

Для отыскания разности двух отрезков, $a = 13{,}2$ *см* и $b = 6{,}8$ *см*, следует приложить одну из линеек к другой так, чтобы деление 13,2 одной из них совпало с делением 6,8 другой, тогда разность отрезков, именно 6,4 *см* (рис. 39), приходится на первой линейке против нулевого деления второй.

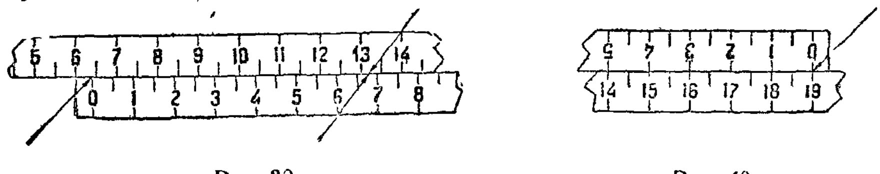


Рис. 39. Рис. 40.

Если повернуть верхнюю линейку в плоскости на 180°, то сложение можно производить значительно быстрее. Так, чтобы найти сумму отрезков, $a = 14$ *см* и $b = 5$ *см* (или $a = 1{,}4$ *мм* и $b = 0{,}5$ *мм*), мы прикладываем одну линейку к другой так, чтобы пятое деление верхней линейки (перевернутой) приходилось против четырнадцатого деления на нижней линейке (рис 40), и тогда против нулевого деления одной из линеек мы прочтем на другой линейке ответ. Отсчет можно производить у конца любой линейки. Другой пример сложения при помощи перевернутой линейки отрезков 17,6 *см* и 3,8 *см* дан на рисунке 41; против нулевого деления нижней линейки имеется ответ на верхней линейке: 21,4 *см*.

Само собою разумеется, такие упражнения можно варьировать сколько угодно, можно также находить суммы трех и более слагаемых, что, однако, зависит только от длины самой линейки.

Рассматривая рисунок 40, учащиеся заметят, что сумма чисел, помеченных на линейках друг против друга, постоянна:

$$3 + 16 = 4 + 15 = 5 + 14 = \ldots = 19.$$

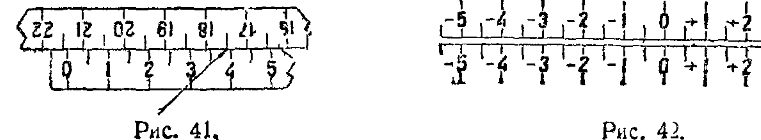


Рис. 41. Рис. 42.

Такого рода линейки могут быть использованы для иллюстрации сложения и вычитания и относительных чисел, если продолжить деления на линейке влево от нуля, т. е. построить числовую ось (рис. 42). На рисунке 43 приведено несколько примеров, решение которых аналогично тем, какие приведены были выше.

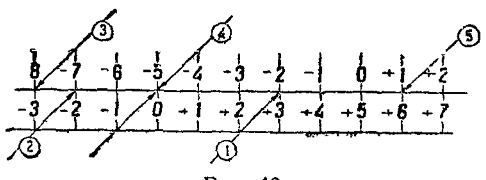


Рис. 43.

Так, например:

4-я и 1-я $\to -5 + (+3) = -2$
4-я и 2-я $\to -5 + (-2) = -7$
4-я и 3-я $\to -5 + (-3) = -8$
3-я и 4-я $\to -8 - (-3) = -5$
1-я и 4-я $\to -2 - (+3) = -5$
и т. п.

При работе с описанными линейками учащиеся могут получить и другие комбинации, не указанные здесь. Опыт показывает, что учащиеся увлекаются работой с линейками; они могут изготовить еще более удобную линейку, представляющую собою одновременно, подобно логарифмической линейке, две пары линеек; по краям такой линейки наносятся две неподвижные шкалы и между ними — подвижные шкалы (движок). На таких линейках можно находить сумму и более чем двух чисел.

Навык в пользовании такими линейками позволит впоследствии учащимся быстрее уяснить себе принцип, на котором основано пользование логарифмической линейкой.

В связи с приведенными примерами действий сложения и вычитания отрицательных отрезков следует указать, что классическая геометрия не различает направления отрезков и, следовательно, не пользуется для обозначения их направления знаками + и —. Введение в курс средней школы направленных отрезков в соответствии с принятым в аналитической геометрии правилом знаков имеет целью иллюстрировать действия с относительными числами, рассматриваемыми в алгебре.

В элементарном курсе геометрии отрезки любого направления считаются положительными.

Раздел этот следует проходить на уроках алгебры, а не геометрии.

Рис. 44.

Рис. 45.

7. Необходимо указать, что с первых же шагов занятий по геометрии следует приучать учащихся к чтению чертежей. Так, рассматривая чертеж, данный на рисунке 44, учащийся должен уметь разъяснить, что, например, отрезок AC изображает сумму отрезков AB и BC, $AC = AB + BC$ или, наоборот, один из отрезков, положим AB, представляет собою разность отрезков AC и CB, $AB = AC - BC$.

Задача. На прямой MN (рис. 45) отмечены точки A, B, C и D. Записать каждый из отрезков в виде суммы или разности остальных отрезков, если известно, что $BC = CD$.

Решение: $AD = AB + BC + CD$,
$AD = AB + 2BC$
$AB = AD - CD - BC$,
$AC = AD - CD$,
$BC = AD - AB - CD$ и т. д.

Понятие об окружности.

8. После систематизации сведений о прямой следует кратко остановиться на окружности и некоторых ее элементах. Это необходимо, так как определение величины меры угла связывается с идеей вращения, а именно — с вращением луча вокруг своей начальной точки.

Подробное изучение окружности, ее свойств, а также линий и углов в круге относится ко времени, когда уже изучены простейшие прямолинейные фигуры, треугольники и четырехугольники.

В данном месте курса окружность рассматривается как кривая замкнутая линия, которую описывает на плоскости один из концов отрезка, если он сделает полный оборот вокруг другого своего конца.

Дается определение окружности: *окружность есть плоская замкнутая кривая линия, все точки которой отстоят на равном расстоянии от одной точки той же плоскости, называемой центром.*

Круг есть часть плоскости, ограниченная окружностью.

На ряде примеров концентрируется внимание на различии понятий окружности и круга. Так, например, бондарь сначала вычерчивает окружность, а потом вырезывает по окружности круг. Указывается, что окружность вполне определена, если дан радиус и положение центра ее.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Перечислить свойства прямой.

2. В чем различие прямой и луча, луча и отрезка, прямой и отрезка?

3. Определить по карте расстояние между Москвой и столицами отдельных советских республик, измеренное по воздушным линиям, и сравнить это расстояние с длиною железнодорожных линий между ними.

Рис. 46.

4. Что называется хордой? дугой?

5. Провести окружность радиуса $R = 0{,}5$ *дм* и отложить от одной точки ее две равные хорды длиною в 0,25 *дм*.

6. Доказать, что хорда короче диаметра.

7. Дана точка O; приняв ее за центр, построить 3 окружности, радиусы которых разнятся друг от друга на 0,5 *см*.

8. На прямой MN даны три точки: A, B и C (рис. 46). Расстояние между серединами O и O_1 отрезков AB и BC равно 5 *м*. Найти AC.

9. Дан круг и в нем проведен диаметр. Диаметр разбивает круг на два полукруга. Какими способами можно совместить один полукруг с другим?

10. Даны отрезки a, b и c. Начертить отрезок $x = 3a + 2b - 4c$. Указать, при каком условии задача возможна.

Указания к контрольным вопросам.

3. Длина воздушных линий измеряется по карте циркулем и переносится на масштабную линейку. Показание последней делится на линейный масштаб, в котором начерчена карта. Длина железнодорожного пути между столицами берется из соответствующего справочника.

Численный масштаб, в котором сокращаются линейные размеры фигуры на рисунке, обычно обозначается дробью, числителем которой служит единица, а знаменателем — число, указывающее, во сколько раз линейные размеры фигуры сокращены против действительных ее размеров. Запись масштаба: 1:100, 1:1000... или вообще $1:n$.

Чтобы перейти к действительным размерам линейных элементов фигуры изображенной на рисунке, нужно каждый из них разделить на принятый численный масштаб. Так, если один из отрезков фигуры на рисунке равен a, то это число a нужно разделить на численный масштаб $\frac{1}{n}$ или, что одно и то же, умножить a на n, и тогда действительная величина линейного элемента равна $a : \frac{1}{n} = a \cdot n = an$.

6. Соединить концы хорды с центром и сравнить длину отрезка — хорды — с длиною ломаной, составленной из двух радиусов, сумма которых равна диаметру.

9. Полукруг можно совместить с другим полукругом, или перегибая полукруг по диаметру или поворачивая в плоскости круга один полукруг вокруг центра до тех пор, пока один конец диаметра не совместится с другим.

10. Задача возможна только при условии, если $3a + 2b \geqq 4c$. При этом рассматриваются лишь положительные отрезки.

§ 8. Угол.

Определение угла.

1. Гильберт, авторитетный математик (род. в 1862 г.), в своих „Основаниях геометрии" следующим образом поясняет, что такое угол.

Пусть, говорит он, α есть произвольная плоскость, а h и k — какие-либо два различные, исходящие из точки O луча в плоскости α, принадлежащие различным прямым. Систему этих двух лучей h, k мы называем углом и обозначаем $\angle(h, k)$ или $\angle(k, h)$ (рис. 47).

Лучи h и k, взятые вместе с точкой O, делят плоскость на две области, из которых одна называется **внутренней областью** угла $\angle(h, k)$ в отличие от другой области, называемой **внешней областью** угла $\angle(h, k)$. Лучи h, k называются **сторонами** угла, а точка O — его **вершиной**.

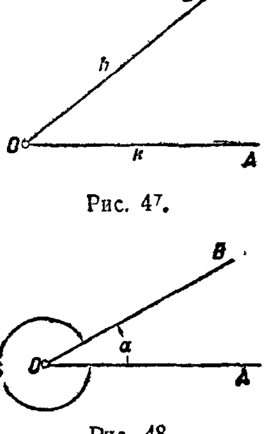


Рис. 47.

Рис. 48.

Для учащихся **угол** определяется как *фигура, образуемая двумя лучами, выходящими из одной точки.*

2. Устанавливается взгляд на величину угла в связи с большим или меньшим путем, который описывает луч при вращении его на плоскости вокруг своей начальной точки. Так, луч OA (рис. 48), вращаясь вокруг своего начала O, непрерывно меняет свое направление, переходит из одного своего первоначального, исходного положения в некоторое иное положение, положим OB, описывая угол AOB.

Величина угла есть мера поворота луча вокруг своей начальной точки.

Понятно, что чем больше луч OA отклонился от своего первоначального, исходного положения, тем больше и угол.

Вращение луча OA в плоскости может происходить по двум направлениям. Если вращение луча OA происходит в направлении, противоположном движению стрелки часов, то принято считать, что луч OA, переходя в положение OB, описывает положительный угол α, если же луч OA вращается в направлении движения стрелки часов, то принято считать, что луч OA, переходя в положение OB, описывает отрицательный угол β.

Указывать учащимся о знаке угла в данном месте не следует; этому вопросу уделяется внимание в курсе тригонометрии.

Чтобы показать, как получается угол, используется модель **шарнирных планок**; может быть использован для указанной цели и циркуль.

Необходимо указать учащимся, что из самого определения угла вытекает, что величина угла **не** зависит от начерченной „длины" его сторон, так как лучи, образующие угол, могут быть безгранично продолжены.

3. На процесс наложения одного угла на другой при сравнении углов между собою должен быть сделан упор, должна быть достигнута четкость в выполнении наложения одного угла на другой, так как в дальнейшем учащимся неоднократно придется пользоваться наложением углов.

Поясняется, что при сравнении двух углов необходимо один из углов наложить на другой так, чтобы: 1) совпали их вершины, 2) одна из сторон одного угла пошла по одной из сторон другого угла и 3) внутренняя область одного угла покрыла хотя бы часть внутренней области другого угла. Если при таком наложении вторая сторона одного из углов пошла по второй стороне другого угла и тем самым внутренние области обоих углов совпали, то такие углы равны, если же часть внутренней области одного из углов остается непокрытой, то рассматриваемые углы неравны, и тот из них больше, внутренняя область которого частично остается непокрытой.

Виды углов.

4. Виды углов надлежит связывать с вращением луча OA вокруг своей начальной точки O. Дается понятие о полном угле (рис. 49), затем — об угле выпрямленном или развернутом; последний характерен тем, что стороны его лежат на одной прямой (рис. 50); развернутый угол, в отличие от прямой линии, имеет вершину.

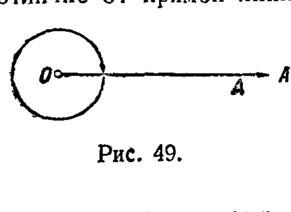


Рис. 49.

Рис. 50.

Справедливость суждения, что все развернутые углы равны между собой, проверяется возможностью совмещения двух прямых.

Прямой угол рассматривается как угол, образуемый вращением луча, сделавшего четверть оборота вокруг своей начальной точки, и указывается, что такой угол равен половине развернутого угла.

Такое определение прямого угла не является строго научным, но на данной ступени можно им ограничиться. Более строгое определение прямого угла дается учащимся в связи с рассмотрением смежных углов, и прямой угол определяется как один из двух равных смежных углов. Научное обоснование того факта, что общая сторона двух смежных углов при своем вращении вокруг вершины может занять только одно единственное положение, при котором оба смежных угла становятся равными, мало доступно учащимся.

Суждение — все прямые углы равны — вытекает как следствие из теоремы о равенстве развернутых углов. В „Началах" Евклида суждение: „все прямые углы равны" включено в число перечисленных Евклидом двенадцати аксиом.

Следует остановиться на определении, что острый угол меньше прямого и тупой угол больше прямого, но меньше развернутого; встречающееся в ряде учебников определение тупого угла как угла больше прямого без упоминания, что тупой угол в то же время меньше развернутого, — неполно, а потому и не вполне верно.

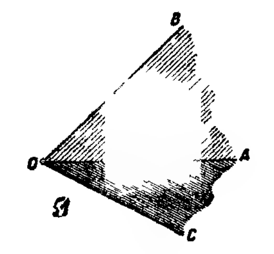


Рис. 51.

5. При определении понятия „прилежащие углы" следует подчеркнуть, что *прилежащими углами называются углы, которые, имея общую вершину и общую сторону, расположены по обе стороны от их общей стороны*; понятно, что внутренние области прилежащих углов не покрывают друг друга (рис. 51). Пояснить это необходимо соответствующим чертежом (рис. 52) и моделями углов, вырезанных из цветной бумаги или картона; каждая модель дает угол с его внутренней областью.

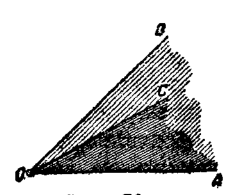


Рис. 52.

В связи с рассмотрением прилежащих углов дается понятие о биссектрисе как равноделящей угла.

6. От прилежащих углов — непосредственный переход к смежным углам. *Смежные углы это два прилежащих угла, крайние стороны которых составляют одну прямую.*

Следует показать учащимся, что при пересечении двух прямых AB и CD в точке O (рис. 53) получаются четыре пары смежных углов.

Свойство смежных углов — **сумма двух смежных углов равна $2d$** — вытекает непосредственно из самого определения смежных углов:

$$\angle AOC + \angle COB = \angle \alpha + \angle \beta = 2d.$$

Учащимся должно быть разъяснено, что один из двух смежных углов есть функция второго смежного угла; так,

$$\angle \alpha = 2d - \angle \beta, \quad \text{или} \quad \angle \beta = 2d - \angle \alpha.$$

Рис. 53.

Подчеркивается, что если один из двух смежных углов — прямой, то и второй смежный угол — прямой, и в связи с этим дается новое определение прямого угла: ***прямой угол есть один из двух равных смежных углов.***

Следует решить задачу:

<u>построить угол, смежный данному.</u>

Для нахождения искомого угла продолжают одну из сторон данного угла за его вершину.

Задача имеет два решения, так как можно продолжить любую сторону угла и, таким образом, можно построить два угла; оба угла равны между собою и каждый из них равен $2d - \alpha$, где α — данный угол. Эта задача должна быть использована при рассмотрении теоремы о равенстве противоположных углов.

Особо рассматривается вопрос о сумме углов, расположенных вокруг одной точки и заполняющих всю область по одну сторону прямой и по обе ее стороны. Следует дать определения:

1) ***Два угла, сумма которых составляет $2d$, называются пополнительными углами.*** Смежные углы являются примером пополнительных углов.

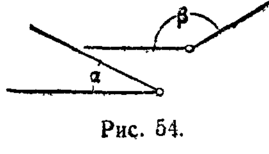


Рис. 54.

Должно обратить внимание учащихся на то, что не всякие пополнительные углы являются вместе с тем и углами смежными. Так, хотя $\angle \alpha + \angle \beta = 2d$ (рис. 54), тем не менее они не являются смежными углами.

2) ***Два угла, сумма которых равна d, называются дополнительными углами.***

Решается задача:

<u>построить при помощи чертежного треугольника угол, дополнительный к данному.</u>

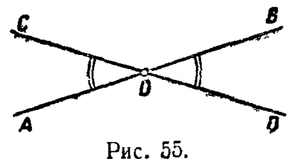


Рис. 55.

7. Вслед за смежными углами рассматриваются противоположные углы. Они получаются пересечением двух прямых AB и CD (рис. 55), имеют общую вершину — точку пересечения прямых AB и CD, и их стороны служат друг другу продолжением. Итак,

противоположными углами называются углы, имеющие общую вершину и стороны которых взаимно противоположные лучи.

В ряде учебников противоположные углы называются вертикальными углами; от этого наименования следует отказаться, так

как обе прямые, образующие противоположные углы, отнюдь не являются вертикальными прямыми.

Теорема — **противоположные углы равны** — доказывается на основании свойства смежных углов. Нужно отметить, что при пересечении двух прямых образуются или острый и тупой или прямые углы, две пары равных между собой углов и четыре пары пополнительных углов.

Учащимся должно быть ясно, что если задана величина одного из углов, образуемых пересечением двух прямых, то тем самым вполне определена и величина остальных трех углов.

8. При помощи шарнирной модели можно показать учащимся, что прямые могут быть так расположены относительно друг друга, что образуют четыре равных угла, каждый из которых — прямой. Вместе с тем дается понятие о перпендикуляре как об одной из двух прямых, образующих прямой угол, а также понятие о наклонной, как об одной из двух прямых, образующих угол, отличный от прямого угла.

Желательно также дать определение перпендикуляра как прямой, являющейся общей стороной двух равных смежных углов.

Проведение к данной прямой перпендикуляра выполняется учащимися при помощи чертежного треугольника; геометрическое построение перпендикуляра с помощью циркуля и линейки дается после ознакомления учащихся с соответствующей теорией свойств треугольников.

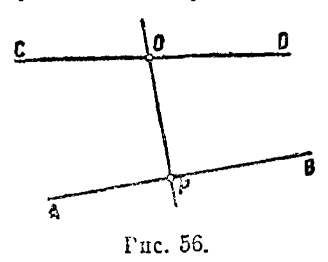
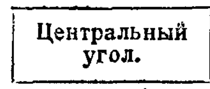


Рис. 56.

Учащиеся должны приобрести твердые навыки в проведении перпендикуляров к прямым, различно расположенным по отношению к краю листа бумаги или доски, на которых выполняется чертеж.

Небесполезно поставить вопрос: может ли прямая быть одновременно и перпендикуляром и наклонной? Ответ поясняется чертежом (рис. 56): $OP \perp AB$ и OP — наклонная к прямой CD.

Считаем необходимым отметить, что термины „опустить“ и „восставить“ перпендикуляр следовало бы заменить одним термином: „провести перпендикуляр“, как это сделано в стабильном учебнике.



9. Знание учащимися, что луч, вращаясь около своей начальной точки, описывает угол, позволяет дать им понятие о центральном угле. Рассматривается центральный угол, $\angle AOB$ (рис. 57), и отмечается его характерная особенность: его вершина лежит в центре, стороны его совпадают с направлениями радиусов окружности, между его сторонами заключена дуга AB той же окружности.

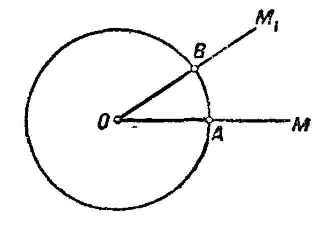


Рис. 57.

Рассматриваются свойства центральных углов и соответствующих им дуг в одной и той же окружности или в равных окружностях; дается понятие об угловом градусе, об угловой минуте и угловой секунде.

Определение: *центральный угол, которому соответствует дуга в один градус, называется угловым градусом.*

Необходимо уделить внимание уяснению учащимися, что число дуговых градусов дуги, соответствующей центральному углу, одновременно показывает и число угловых градусов угла.

После разъяснения, что полный угол с вершиной O в центре окружности разбивается на 360 равных центральных углов и, следовательно, на 360 градусов, записывают, что развернутый угол равен 180° и прямой угол равен 90°; таким образом подходят к разъяснению, что один угловой градус есть угол, равный $\frac{1}{90}$ прямого угла.

Для закрепления учащимися умения перевода градусной меры угла в доли прямого угла и обратно следует проделать ряд примеров. Надо отметить, что главное преимущество деления прямого угла на 90 градусов состоит в том, что число 90 делится без остатка на 2, 3 и 5.

Следует указать, что в настоящее время минуты и секунды вытесняются десятичными долями градуса. Так, например, вместо $20^\circ 45'$ пишут $20^\circ,75$ или вместо $11^\circ 12'$ пишут $11^\circ,2$. Учащиеся должны уметь переходить от обозначения минут и секунд к десятичным долям градуса.

10. Прямой угол принято делить и на 100 равных частей, на 100 градов, при этом слово „град“ отмечается у числа справа в верхнем его углу малой буквой „*г*“; град в этой „центезимальной“ системе делится на 100 равных частей, и каждая такая часть называется минутой; сотая часть минуты называется секундой; минуты и секунды обозначаются теми же значками, как и в „шестидесятиричной“ системе, только наклоненными влево; так, $32^{г}40'82''$ означает: 32 града 40 минут 82 секунды.

По центезимальной системе весьма просто перевести данное число градов, минут и секунд или в грады, или в минуты, или в секунды и обратно. Так,

$$20^{г}72'83'' = 20^{г},7283 = 2072',83 = 207283''.$$

Минуты и секунды можно заменить сотыми и десятитысячными долями града.

Отметим следующее: первоначально метр определяли как одну десятимиллионную часть дуги четверти земного меридиана, а потому дуга одного града земного меридиана содержит 100 *км*, дуга в $1'$, т. е. дуга в одну минуту, содержит 1 *км* и, наконец, дуга в $1''$, т. е. дуга в одну секунду, содержит 10 *м*.

Одной же минуте ($1'$) в градусной мере соответствует меридианная дуга приблизительно в 1852 *м*; это — морская миля, посредством которой выражают скорость судна. Так, судно, идущее в час со скоростью 18 узлов, имеет скорость 18 морских миль.

Наконец, дается знакомство с транспортиром, его устройством и пользованием им; решаются задачи на действия с углами при помощи транспортира.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Что такое угол?

2. Какой угол называется центральным?

3. Какие углы называются смежными? противоположными? Их свойства?

4. Какой угол называется прямым? острым? тупым?

5. Скольким частям прямого угла равен угол в 120°, 135°, 150°, 225°, 315°, 45°, 75°?

6. $\angle ABC = 65^\circ$, $\angle A_1B_1C_1 = \frac{2}{3}d$; который из них больше?

7. Один из двух смежных углов в 5 раз больше (меньше) другого; чему равен каждый из углов?

8. Даны две пересекающиеся прямые. Из взятых на каждой из них точек A и B, C и D провести к другой прямой перпендикуляры (рис. 58).

9. Какая линия называется биссектрисой угла?

10. Доказать, что биссектрисы двух смежных углов взаимно перпендикулярны.

11. Вокруг одной точки расположены 8 равных прилежащих углов. Чему равен каждый из них?

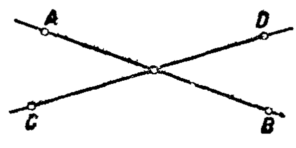


Рис. 58.

Рис. 59.

12. Дан $\angle ABC = 70^\circ$ (рис. 59); через вершину B угла проведены к обеим его сторонам перпендикуляры; найти угол между перпендикулярами.

Решение. $\angle ABC = 70^\circ$, $MN \perp BC$ и $KL \perp AB$.

Искомые углы: $\angle KBM$ и $\angle MBL$; $\angle KBM = 70^\circ$ и $\angle MBL = 110^\circ$.

§ 9. Треугольник.

Предварительные указания.

1. Треугольник — одна из основных фигур элементарной геометрии. Всестороннее изучение треугольника должно дать учащимся твердые навыки в построении треугольника по отдельным его основным и неосновным элементам, знание зависимостей между элементами треугольника, а также характерных свойств отдельных видов треугольников, признаков равенства треугольников и вытекающих из них следствий, умение использовать приобретенные знания о треугольниках при рассмотрении отдельных видов фигур и установлении зависимостей между отдельными их элементами и при решении задач.

Рис. 60.

Особое внимание должно быть уделено при ознакомлении учащихся с треугольниками и фигурами, вообще их образованию, изменению их формы в зависимости от изменения расположения и величины отдельных их элементов.

Рассматривая ту или иную фигуру, преподаватель обязан приучать учащихся иметь в виду, что приведением отдельных частей фигуры в движение не только изменяются форма самой фигуры и количественные соотношения между отдельными ее элементами, но и теряются некоторые характерные, присущие фигуре, качественные особенности, взамен которых выступают новые качественные особенности, вызванные изменением первоначальной формы фигуры.

Так, если в тупоугольном треугольнике ABC (рис. 60) перемещать в направлении, указанном стрелкой, вершину его C по прямой, парал-

дельной основанию AB, то тупоугольный треугольник ABC, в зависимости от положения вершины C, обратится или в прямоугольный, или в разносторонний, притом остроугольный треугольник, или в равнобедренный треугольник и т. д.

Изучение треугольника следует начать с краткого повторения основных свойств прямой; они следующие: 1) через две данные различные точки можно провести прямую и притом только одну; 2) прямую можно продолжить в обе стороны без конца; 3) если две прямые имеют только одну общую точку, то они пересекаются, и точка пересечения прямых называется **следом**, или **основанием**, одной прямой по отношению к другой; 4) две пересекающиеся прямые образуют 4 угла, из которых 2 пары противоположных и 4 пары смежных; 5) кратчайшее расстояние между двумя точками измеряется длиною отрезка прямой, концами которого служат эти две точки.

После повторения свойств прямой нужно показать учащимся, что прямолинейные фигуры, в том числе и треугольник, получаются как сочетание определенного числа точек и прямых, проходящих через эти точки.

Учащиеся знают, что три различные точки, не лежащие на одной прямой, определяют положение трех прямых, а потому для них должно быть ясно и то, что **наибольшее число прямых, определяемых тремя точками,—три**.

Многоугольник и его элементы.

2. Дается определение n-угольника: ***n-угольник — часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной линией, состоящей из n звеньев.*** Следует указать, что в курсе планиметрии обычно рассматриваются только выпуклые многоугольники, если не сделано особой оговорки. Звенья ломаной называются **сторонами** многоугольника, точки их пересечения — **вершинами**, а углы между смежными звеньями — **углами** многоугольника. Число сторон и число внутренних углов совпадает и равно числу вершин.

Сумма длин всех сторон — **периметр** многоугольника. Нередко периметром называют и самую ломаную линию. Это неверно. Необходимо различать **периметр** и **контур** многоугольника.

Нельзя также определять сторону многоугольника как часть ломаной линии, ибо частью ломаной могут быть и ломаная и отрезок. Действительно, $KFEL$ — часть ломаной — тоже ломаная, EL — часть ломаной — отрезок, часть стороны ED (рис. 61).

Рис. 61.

Ставится вопрос о части плоскости, ограниченной замкнутой ломаной с наименьшим числом звеньев. Это — треугольник, т. е. n-угольник с тремя сторонами, $n=3$; при $n=2$ ломаная линия не замыкается. Итак,

треугольник есть часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной линией, состоящей из трех звеньев.

Дается определение внешнего угла многоугольника:

внешним углом многоугольника называется угол, смежный внутреннему углу многоугольника.

Необходимо при этом указать учащимся, что при каждой вершине многоугольника можно согласно определению построить 2 внешних угла (рис. 62); они равны как углы противоположные, а потому при каждой вершине многоугольника принимается в расчет только один внешний угол; число внешних углов, таким образом, совпадает с числом вершин, сторон и внутренних углов.

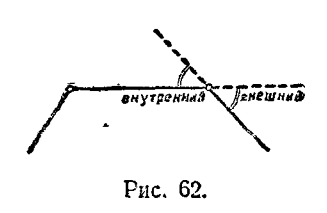


Рис. 62.

Следует обратить внимание учащихся на четвертый угол при вершине многоугольника, образуемый продолжением двух смежных сторон за вершину; он равен внутреннему углу многоугольника и не является внешним углом многоугольника.

Необходимо рассмотреть вопрос о сумме внешнего угла многоугольника и смежного с ним внутреннего, а в связи с этим — и вопрос о сумме всех внешних и внутренних углов многоугольника, вместе взятых. Учащиеся должны сами вывести формулу

$$S_n = 2dn \quad \text{или} \quad S'_n = 180^\circ \cdot n,$$

где n — число сторон или вершин n-угольника.

Диагонали.

3. Дается определение диагонали: *диагональ многоугольника — отрезок, концами которого служат две вершины многоугольника, не лежащие на одной стороне его.* Выясняется, сколько всего диагоналей можно провести из одной вершины многоугольника; число их равно $n - 3$, т. е. числу n вершин многоугольника без трех.

При $n = 3$ число диагоналей $n - 3 = 0$, а это означает, что в треугольнике нельзя провести ни одной диагонали.

Полезно решить с учащимися задачу о нахождении числа всех диагоналей n-угольника. Приводим два решения.

Решение 1. Число всех диагоналей и всех сторон n-угольника определяется числом прямых, которые можно провести через n точек — вершин; это число равно $\frac{n(n-1)}{2}$; если от этого числа отнять число сторон n многоугольника, то получается число всех его диагоналей:

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - n - 2n}{2} = \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{(n-3)n}{2}.$$

Решение 2. Если из одной вершины n-угольника можно провести $n - 3$ диагоналей, то из n вершин можно будет провести в n раз больше диагоналей, т. е. $(n-3)n$ диагоналей, но при таком счете каждая диагональ сосчитана 2 раза, а потому действительное число диагоналей равно $\frac{n(n-3)}{2}$.

Пример. Найти число всех диагоналей семиугольника.

Ответ: $x = \frac{7(7-3)}{2} = 14$.

Если к последнему числу — числу диагоналей семиугольника — прибавить число сторон семиугольника, то получим $14 + 7 = 21$; это число 21 — число прямых, проходящих через 7 точек, из которых никакие 3 не лежат на одной прямой.

Следует решить и обратную задачу:

в каком многоугольнике число всех диагоналей равно 20?

Вопрос решается по формуле:

$$\frac{n(n-3)}{2}=20,$$

где n — число сторон искомого многоугольника.

Решается квадратное уравнение:

$$n^2-3n-40=0,$$

откуда

$$n_1=8 \quad \text{и} \quad n_2=-5.$$

Ответ: число сторон $n=8$.

Однако, если учащиеся на данной стадии еще не умеют решать квадратных уравнений, то задачу следует решать на основе следующих рассуждений.

Удвоенное число диагоналей n-угольника $n(n-3)$ согласно условию задачи равно 40. Чтобы найти число n, надо число 40 разложить на два множителя, из которых один на 3 больше другого. Составляем все возможные разложения числа 40 на два множителя: $1\cdot40$, $2\cdot20$, $4\cdot10$, $5\cdot8$ и из них выбираем то разложение, в котором разность множителей равна 3; это будет $8\cdot5$; следовательно $n=8$; искомый многоугольник — восьмиугольник.

Задача: в каком многоугольнике число диагоналей равно 50?

Взяв $2\cdot50=100$, разложим число 100 на такие два целых множителя, разность между которыми равна 3. Оказывается, что среди возможных разложений: $1\cdot100$, $2\cdot50$, $4\cdot25$, $5\cdot20$, $10\cdot10$ нет ни одной пары множителей, разность между которыми равна 3, а это значит, что нет такого многоугольника, число диагоналей которого было бы равно 50.

Тем же приемом решается задача:

наибольшее число прямых, которые можно провести через n точек, равно 28. Найти n.

Решение. По условию $n(n-1)=56$, следовательно число 56 надо разложить на два последовательных множителя; такими множителями будут 7 и 8, значит $n=8$, т. е. надо взять 8 точек, из которых никакие 3 не лежат на одной прямой.

Необходимо также решить с учащимися вопрос о числе треугольников, на которые разбивается многоугольник диагоналями, проведенными из одной его вершины.

После разбивки 4-, 5-, 6-, 7-, ..., n-угольника всеми диагоналями, проведенными из одной вершины, на треугольники учащиеся убеждаются, что в каждом отдельном случае число треугольников на 2 меньше числа сторон многоугольника. При n сторонах многоугольника получается $n-2$ треугольника.

Следует обратить внимание учащихся на то, что число треугольников, на которое разбивается n-угольник всеми диагоналями, проведенными из одной какой-либо его вершины, зависит от числа n сторон многоугольника.

Треугольники; их классификация.

4. Следует рассмотреть с учащимися различные виды треугольников в зависимости от длины их сторон и величины их углов.

Понятно, что рассмотрение разных видов треугольников сопровождается одновременно и их вычерчиванием.

Заметим, что, говоря о сторонах треугольника, под „стороною" обычно подразумевают отрезок, концами которого служат две вершины треугольника; в отдельных случаях стороною треугольника называется прямая, проходящая через две вершины треугольника.

Для демонстрации всех видов треугольников можно использовать модель треугольника с раздвижными сторонами и прикрепленными к его сторонам транспортирами. Схема модели дана на рисунке 63.

Ниже дается описание прибора, с помощью которого демонстрируются свойства и треугольника и многоугольника.

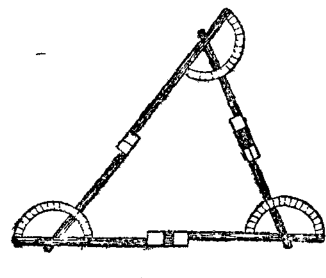


Рис. 63.

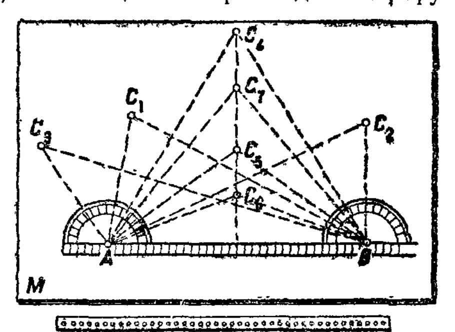


Рис. 64.

На доске M из мягкого дерева или фанеры начерчена прямая AB с нанесенными на нее делениями (рис. 64). В различных точках доски, например в точках A, B, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 и C_7 и других, по мере надобности вбиты гвоздики, обращенные своими остриями к зрителю (гвоздики вбиты в доску с обратной ее стороны) Кроме того используется набор деревянных или металлических планочек с отверстиями на равных друг от друга расстояниях, соответствующих делениям на прямой AB. Надевая затем планочки[1]) на A и C_1, B и C_1, мы получаем треугольник AC_1B — разносторонний остроугольный. Углы при A и B отсчитываются по транспортирам, начерченным на доске; углы же при точках C_1, C_2, ... измеряются отдельно.

Неосновные элементы треугольника.

5. На этой же доске весьма удобно показать высоты, медианы, биссектрисы треугольников. Следует указать учащимся, что понятие высоты и биссектрисы треугольника — понятие двойственное. *Высотою* называется и п р я м а я, проведенная из вершины тре-

[1]) Лучше, если планочки — металлические.

Можно взять и простой шнур с грузилами на концах и, накинув шнур, например на гвоздик C_3, перекинуть его концы справа от A и B, тогда получится треугольник ABC_3 — тупоугольный, разносторонний (длина сторон может быть в этом случае измерена масштабной линейкой с делениями на сантиметры и миллиметры). При пользовании шнуром доску удобнее всего выкрасить в белый цвет, а шнур и прямую AB — в черный цвет.

Можно взять и толстый резиновый шнур, прикрепить его концами к A и B и затем по мере надобности перекидывать через точки C_1, C_2, C_3 и т. д.

угольника перпендикулярно к противолежащей стороне или к ее продолжению, и отрезок, концами которого служат вершина и основание этого перпендикуляра; *биссектрисой* называется и равноделящая угла и отрезок, концами которого служат вершина треугольника и основание биссектрисы, проведенной из этой вершины, т. е. точка пересечения биссектрисы со стороной. Если говорят о высотах и биссектрисах треугольника, то имеют в виду отрезки, а не прямые, если не сделано об этом особых оговорок.

Следует обратить внимание учащихся на то, что в треугольниках остроугольных высоты проходят внутри треугольника и пересекаются внутри его; в треугольниках прямоугольных две высоты совпадают со сторонами — катетами — и пересекаются в вершине прямого угла, третья же высота проходит внутри треугольника; наконец, в треугольниках тупоугольных две высоты проходят вне треугольника, одна — внутри; при своем продолжении за их основание они пересекаются вне треугольника.

Что же касается медиан и биссектрис, то нужно указать, что в любом треугольнике они пересекаются внутри треугольника.

Необходимо особо подчеркнуть учащимся, что высота, медиана и биссектриса, проведенные из одной и той же вершины, вообще говоря, — три различные линии. Это следует показать и на модели. Кроме того учащихся надо приучать к обозначениям неосновных элементов: высоты любого треугольника на соответствующие им стороны a, b и c обозначаются через h_a, h_b, h_c; медианы — через m_a, m_b, m_c; биссектрисы треугольника — через β_A, β_B и β_C.

Свойства углов треугольника.

6. После вычисления суммы всех внешних и всех внутренних углов треугольника учащиеся нередко ставят вопрос: чему же равна отдельно сумма внутренних и отдельно сумма внешних углов треугольника?

Подробное рассмотрение вопроса и проведение соответствующего логического доказательства в данном месте невозможно, так как учащиеся еще не знакомы с теорией параллельных прямых.

Все же можно в данном случае опытным путем показать учащимся, что сумма внутренних углов треугольника равна $2d$, а сумма внешних его углов равна $4d$. Этот показ, однако, отнюдь не освобождает преподавателя от рассмотрения впоследствии вопроса о сумме углов треугольника при проработке теории параллельных.

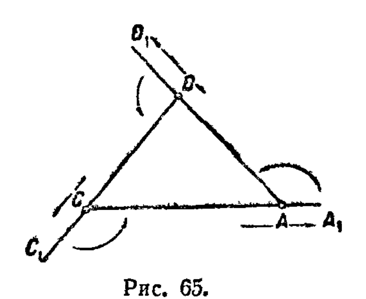


Рис. 65.

Чертят на полу в классе или во дворе на песке (нередко и древние греки, в том числе и Архимед, вычерчивали свои фигуры на песке) какой-нибудь треугольник и строят его внешние углы в одном направлении, как показано на рисунке 65. Учащийся приглашается встать в вершине треугольника, например в вершине A, лицом к A_1, вытянуть в этом направлении руку, а затем повернуться, не изменяя положения руки относительно тела, на угол A_1AB и пройти до вершины B; вытянутая рука его направлена на B_1; таким образом, учащийся сделал поворот на угол A_1AB. У вер-

шины B учащийся снова поворачивается, сохраняя положение вытянутой руки, на угол B_1BC и направляется к вершине C; здесь он снова поворачивается на угол C_1CA и направляется к вершине A; его рука вытянута по направлению к точке A_1; учащийся, повернувшись вокруг каждой вершины треугольника на некоторый угол, сделал всего один полный поворот, т. е. повернулся на 360°, или $4d$. Отсюда вывод:

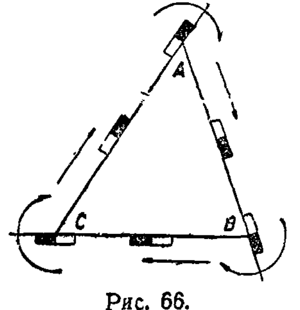


Рис. 66.

сумма внешних углов треугольника равна $4d$.

Подобного рода опыт с четырехугольником, пятиугольником и т. д. приводит учащихся к выводу, что сумма внешних углов равна $4d$ не только в рассмотренных многоугольниках, но и в любом n-угольнике.

Следует при этом указать учащимся, что невозможно проделать подобного рода опыт со всевозможными многоугольниками и треугольниками, а потому и нельзя быть уверенным в том, что полученный вывод верен для любой прямолинейной фигуры; подчеркивается, что для того, чтобы убедиться в справедливости полученного вывода, требуется еще доказать, что вывод верен для любого треугольника и любого многоугольника, независимо от величины отдельных их углов. Учащиеся предупреждаются, что необходимое строгое доказательство о сумме внешних углов n-угольника будет им дано в дальнейшем (раздел о параллельных прямых).

Можно показать учащимся и такой опыт. Вырезают из фанеры треугольник произвольных размеров, прикладывают к его краю, как показано на рисунке 66, небольшую планочку, окрашенную в два цвета — черный и белый, и перемещают ее сперва по стороне AB треугольника, а затем, доведя ее до вершины B, поворачивают ее вокруг вершины B так, чтобы она скользила по стороне BC, и так далее, пока она снова не займет своего первоначального положения т. е. ее черный конец не будет обращен опять к вершине B.

Вывод: планочка сделала один полный поворот на 360°, отсюда заключаем, что

сумма внешних углов равна 360°, или $4d$.

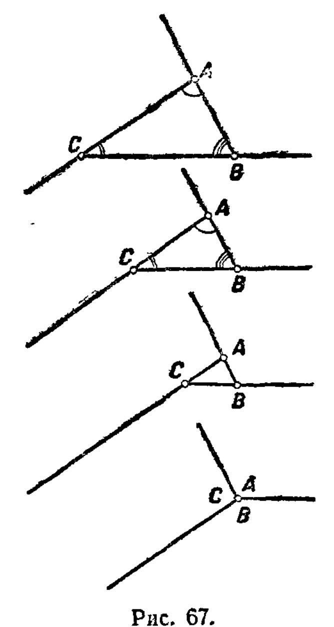


Рис. 67.

К тому же выводу приводит нас и следующее рассуждение. Пусть дан треугольник ABC с его внешними углами (рис. 67). Допустим, что стороны треугольника постепенно сокращаются в 2, 3, 4 и т. д. раз; в конечном итоге, когда сам треугольник обратится в точку, внутренние его углы „исчезнут", останутся же только одни внешние его углы; их сумма равна $4d$.

Можно, наконец, начертить треугольник (рис. 68) с внешними его углами и, вырезав внешние углы, приложить их затем друг к другу

вершинами так, чтобы углы не покрывали друг друга, т. е. чтобы они были прилежащими (рис. 69); учащиеся „увидят“, что и в данном опыте углы в сумме дают $4d$.

Когда найдена сумма всех внешних углов треугольника и многоугольника, учащиеся могут сами вычислить и сумму внутренних углов любой прямолинейной фигуры.

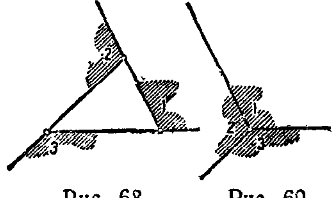


Рис. 68. Рис. 69.

В самом деле, сумма всех внутренних и внешних углов треугольника равна $2d \cdot 3 = 6d$, отсюда сумма только внутренних углов его равна: $6d - 4d = 2d$.

Для четырехугольника имеем:

$$2d \cdot 4 - 4d = 4d.$$

Для пятиугольника: $2d \cdot 5 - 4d = 6d$ и т. д.

Устанавливать здесь зависимость между величиной суммы внутренних углов многоугольника и числом его сторон не следует; отмечать, что сумма внешних углов многоугольников — величина постоянная, необязательно; если, однако, учащиеся сами придут к этому выводу, то следует этот вывод подтвердить; отнюдь нельзя убивать инициативу учащихся заявлением: „Это для вас еще рано, узнаете потом“.

Зависимость между сторонами треугольника.

7. Преподаватель должен всегда помнить, что одной из основных задач геометрии является решение задач на построение. В силу этого важно иметь в своем распоряжении такие правила, применение которых позволяет, прежде чем приступить к построению треугольника, решить, возможно ли построение по заданным условиям задачи. К таким правилам относится теорема, устанавливающая зависимость между сторонами треугольника. Эту же теорему следует применять для проверки длин сторон треугольника, найденных при решении задач на вычисление.

Зависимость между сторонами треугольника получается на основании свойства прямой:

$$AB < BC + CA;$$
$$BC < CA + AB;$$
$$CA < AB + BC.$$

Если последовательно вычесть из обеих частей неравенств соответственно по равному отрезку BC, CA и AB, то получим:

$$AB - BC < CA;$$
$$BC - CA < AB;$$
$$CA - AB < BC.$$

Сопоставляя эти неравенства, имеем:

$$AB - BC < CA < AB + BC;$$
$$BC - CA < AB < BC + CA;$$
$$CA - AB < BC < CA + AB.$$

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон и больше их разности.

Эта зависимость весьма существенна; ее достаточно проверить только для большей стороны треугольника. Так, если даны три отрезка, размеры которых a, b и c, причем $a > b > c$ и $a < b + c$, то треугольник с данными сторонами a, b и c существует.

Надо указать и на аксиому, которой в данном случае пользуются: **если две величины не равны между собой, то, прибавляя или отнимая от них по равной величине, получается неравенство того же смысла.**

Так:

$$8 > 3 \quad \text{и} \quad 8 + 2 > 3 + 2, \text{ или } 10 > 5$$
$$\text{и} \quad 8 - 2 > 3 - 2, \text{ или } 6 > 1.$$

Необходимость применения полученной выше зависимости между сторонами треугольника можно проверить на следующем вопросе:

две стороны равнобедренного треугольника равны 3 *см* и 6 *см*; чему равна третья сторона?

В равнобедренном треугольнике две стороны равны. Здесь могут встретиться два случая: искомая сторона равна или 3 *см* или 6 *см*. Треугольник со сторонами в 3 *см*, 3 *см* и 6 *см* невозможен, так как 6 не меньше $3 + 3$. Возможен только треугольник со сторонами в 3 *см*, 6 *см* и 6 *см*, так как $6 < 6 + 3$. Итак, основанием треугольника служит сторона в 3 *см*, и его боковые стороны равны каждая 6 *см*.

Точно так же при решении вопроса, в о з м о ж е н л и т р е у г о л ь н и к, с т о р о н ы к о т о р о г о о т н о с я т с я, к а к 2:4:7, проверка показывает, что такой треугольник невозможен, так как $7 > 4 + 2$.

Целесообразно дать учащимся следующую задачу:

две стороны равнобедренного треугольника относятся, как 2:5. Периметр треугольника равен 36 *м*. Вычислить его стороны.

Сначала надо установить, дано ли отношение основания к боковой стороне или отношение боковой стороны к основанию. Если принять сторону основания равной $5x$, то боковые стороны должны содержать по $2x$, и тогда: $5x > 2x + 2x$, т. е. одна сторона больше суммы двух других, что невозможно. Значит, основание равно $2x$ и каждая боковая сторона равна $5x$. Отсюда:

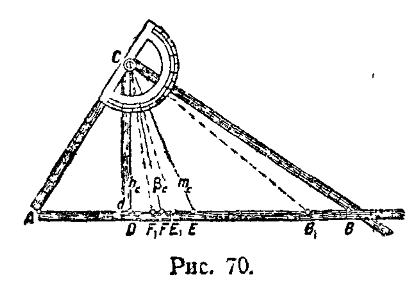


Рис. 70.

$2x + 5x + 5x = 36$,	$2x = 6$
или $12x = 36$	$5x = 15$
$x = 3$	$5x = 15$

Итак, стороны искомого треугольника равны 6 *м*, 15 *м* и 15 *м*.

Равнобедренный треугольник.

8. Прежде чем перейти к доказательству свойств равнобедренного треугольника, можно ознакомить с ними учащихся по модели, рассмотренной выше (рис. 70). Оставляя неподвижными стороны AC и AB треугольника ABC, вращаем его сторону CB вокруг вершины C так, чтобы точка B приближалась к вершине A; для каждого отдельного положения треугольника рассматриваем расположение его неосновных элементов — высоты, медианы и биссек-

трисы. Учащиеся убеждаются, что высота CD треугольника остается неизменной, ибо угол CDA должен быть прямым; точка E — середина AB и основание медианы CB — перемещается влево вместе с перемещением влево точки B, сам же отрезок CE укорачивается; точно так же перемещается влево и точка F — основание биссектрисы, так как угол ACB, а следовательно, и половина его — угол ACF — уменьшаются. В том случае, когда CB становится равным CA, треугольник ABC обращается в равнобедренный и отрезки CE, CF и CD совпадают, так как совпали точка E с точкой D, в чем можно убедиться по числу делений на AB, и точка F с точкой D, т. е. биссектриса совпадает с высотой, в чем можно убедиться отсчетом по транспортиру.

Итак, опыт показывает, что высота, медиана и биссектриса, проведенные в равнобедренном треугольнике из его вершины, совпадают; однако вывод, полученный на основании проделанного опыта, верен только для данного треугольника; чтобы убедиться, что в любом равнобедренном треугольнике три неосновных элемента могут совпасть, требуется еще доказать теорему:

в равнобедренном треугольнике биссектриса угла при вершине есть в то же время и высота и медиана.

Доказательство наложением имеется в стабильном учебнике, там же указан и порядок последовательности записи теоремы.

Осевая симметрия.

9. Рассмотрение свойств равнобедренного треугольника приводит к вопросу об осевой симметрии точек, прямых и фигур. Учащимся предлагается вычертить фигуру, симметричную относительно данной прямой — оси симметрии. На рисунке 71 даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, симметричные относительно оси MN; продолжения сторон AC и A_1C_1, CB и C_1B_1 треугольников пересекаются на оси симметрии в точках N и M.

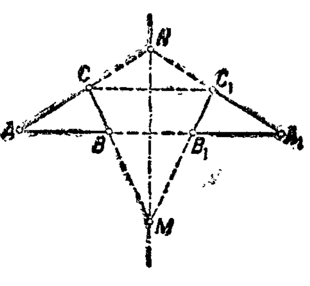


Рис. 71.

Если теперь поставить вопрос о наложении одного треугольника на другой, не выводя их из плоскости, то попытки выполнить это наложение убедили бы нас в его невозможности. Как ни перемещать треугольник $A_1B_1C_1$ в данной плоскости, его нельзя совместить с треугольником ABC, если только не выведем треугольник $A_1B_1C_1$ из плоскости и не повернем его на 180° в пространстве вокруг оси симметрии NM, подобно тому, как мы это делали при доказательстве свойств равнобедренного треугольника, поворачивая на 180° в пространстве вокруг биссектрисы угла при вершине одну часть треугольника до совпадения ее с другой.

Равенство треугольников.

10. Теме о равенстве треугольников, одной из основных и важнейших тем курса геометрии, должно быть уделено особое внимание. Разработку темы следует начать с выяснения понятия равенства фигур, используя для этой цели модели различных фигур, из которых одни при наложении совмещаются всеми своими элементами, другие же не совмещаются. Для показа берутся прямолинейные фигуры, а также фигуры, ограниченные кривой линией.

Дается определение: *две фигуры называются равными, или конгруэнтными, если они при наложении друг на друга могут совпасть всеми своими элементами.* Необходимо пояснить учащимся, что в том случае, когда речь идет о прямолинейных фигурах, под основными элементами подразумевают стороны и углы фигур.

Надо следить за тем, чтобы учащиеся давали четкое определение понятия равенства фигур и не смешивали это определение с признаками и свойствами фигур. Так, на вопрос, какие треугольники называются равными, учащиеся, изучив признаки равенства треугольников, нередко отвечают: такие треугольники, у которых соответственно равны две стороны и угол между ними, и т. п.; понятно, что такой ответ указывает, что учащиеся смешивают признак равенства с определением равных треугольников.

Признаки равенства треугольников следует расположить в том порядке, как это сделано в стабильном учебнике: 1) первый признак — по одной стороне и двум прилежащим углам; 2) второй признак — по двум сторонам и углу между ними; 3) третий признак — по трем сторонам.

Следует рекомендовать пользоваться для краткости обозначения признаков равенства треугольников следующими обозначениями: для 1-го признака — УСУ, для 2-го признака — СУС и для 3-го признака — ССС. Такое обозначение целесообразно тем, что сокращает запись; например, символ УСУ указывает, что сторона лежит „между" двумя углами, символ СУС — что угол расположен „между" двумя сторонами, и т. д.; кроме того такая символическая запись упрощает запись доказательства при ссылке на признаки равенства треугольников.

При доказательстве первых двух признаков равенства треугольников применяется *метод наложения.* Наложение одного треугольника на другой следует всегда выполнять в таком порядке: сначала необходимо совместить точки — вершины, затем — стороны, а следовательно и вторые вершины, а затем уже по данному углу или данным углам судить о том, как пойдет другая сторона или другие две стороны рассматриваемых треугольников; если при наложении одного треугольника на другой удается обнаружить, что и третья вершина одного треугольника совпадает с третьей вершиной второго треугольника, то треугольники совпадают, они конгруэнтны, т. е. они равны.

Итак, совмещение двух треугольников (а следовательно и других прямолинейных фигур) всегда имеет место при совмещении всех их вершин.

Следует иметь в виду, что доказательство методом наложения основано на аксиоме: геометрические тела и вообще фигуры не зависят от места, занимаемого ими в пространстве, и могут быть перенесены без изменения из одного места пространства в другое.

Эта аксиома выражает одно из самых важных свойств пространства; указанное свойство позволяет сравнивать между собой геометрические тела и фигуры вложением и наложением.

Понятно, что и эта аксиома получена из опыта как результат наблюдения перенесения физических тел из одного места в другое.

В планиметрии кроме того следует иметь в виду, что фигуру можно поворачивать и наложить одну фигуру на другую ее „обратной" стороной.

При доказательстве третьего признака равенства треугольников не пользуются методом наложения, так как после совмещения двух соответ-

ственно равных сторон отсутствие указаний о равенстве углов рассматриваемых треугольников не позволяет судить о направлении других соответственно равных сторон треугольников. В силу этого прибегают при выводе третьего признака равенства треугольников (ССС) к повороту одного из треугольников вокруг одной из его сторон, другими словами пользуются *не перемещением* треугольника в его плоскости, *а поворотом* треугольника на 180° в пространстве с тем, чтобы тем самым наложить его на второй треугольник. К такому способу наложения одного треугольника на другой приходится прибегнуть потому, что при обычном доказательстве через перемещение треугольника в его плоскости, как это делалось при доказательстве первых двух признаков равенства треугольников, приходится прибегать к весьма сложным дополнительным построениям и рассуждениям. Точно так же мы поступали при выводе свойств равнобедренного треугольника.

11. Кроме рассмотрения трех признаков равенства треугольников, что предусмотрено программой Наркомпроса, желательно, если позволяют время и общий уровень класса, познакомить учащихся и с четвертым признаком; знание и этого признака позволяет все признаки равенства прямоугольных треугольников вывести как следствия из признаков равенства косоугольных треугольников, чем исключается необходимость особого рассмотрения двух случаев равенства прямоугольных треугольников лишь после изучения свойств перпендикуляра и наклонных.

Теорема (четвертый признак равенства треугольников): **два треугольника равны, если соответственно равны две стороны этих треугольников и угол, лежащий против большей из названных сторон одного треугольника, равен углу, лежащему против соответственно большей стороны другого треугольника.**

Дано: $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$, $BC > CA$ и $\angle A = \angle A_1$ (рис. 72).
Треб. док.: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство. Наложим треугольник $A_1B_1C_1$ на треугольник ABC так, чтобы вершина C_1 совпала с вершиной C и сторона C_1A_1 пошла по стороне CA, тогда вершина A_1 совпадет с вершиной A вследствие равенства сторон, $C_1A_1 = CA$, кроме того сторона A_1B_1 пойдет по стороне AB, так как $\angle A_1 = \angle A$. Возникает вопрос: пойдет ли сторона C_1B_1 по стороне CB? Возможны три случая — сторона C_1B_1 может пойти: 1) внутри угла BCA, 2) вне угла BCA и 3) по стороне CB.

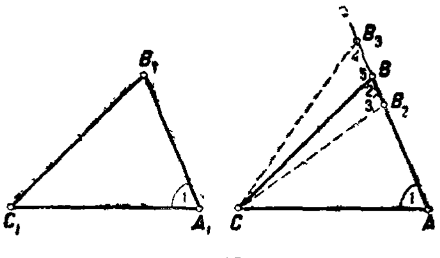


Рис. 72.

Рассмотрим первый возможный случай.

Если сторона C_1B_1 пойдет внутри угла BCA и займет положение CB_2, то полученный при этом треугольник B_2CB — равнобедренный, так как по условию $BC = B_1C_1$, и тогда $\angle 2 = \angle 3$ и $\angle 3 > \angle 1$ как внешний угол треугольника ACB_2; если так, то и $\angle 2 > \angle 1$, что, однако, противоречит условию, так как $\angle 2 = \angle B$ лежит против стороны CA, которая меньше стороны BC; следовательно, C_1B_1 *не может занять положение* CB_2 внутри угла ACB.

Рассмотрим второй возможный случай.

Допустим, что сторона C_1B_1 пойдет вне угла BCA и займет положение CB_3. И в этом случае получится равнобедренный треугольник BCB_3, в котором $\angle 4 = \angle 5$; но так как $\angle 5 > \angle 1$, как внешний угол треугольника ABC, то и $\angle 4 > \angle 1$; но это противоречит условию, ибо $\angle 4 < \angle 1$ в силу того, что $CB > CA$. Итак, сторона C_1B_1 не может пойти вне угла BCA.

Мы доказали, что сторона C_1B_1 не может пойти ни внутри угла BCA, ни вне его, следовательно она должна пойти по стороне CB, а в таком случае вершина B_1 совпадет с вершиной B, потому что две прямые могут пересечься только в одной точке.

Итак, все три вершины обоих треугольников совпали, следовательно треугольники совмещаются — они равны.

Из теоремы непосредственно следует, что

два прямоугольных треугольника равны, если гипотенуза и катет одного из них соответственно равны гипотенузе и катету другого,

так как кроме соответственного равенства двух линейных элементов обоих треугольников равны и прямые их углы, лежащие против гипотенуз, т. е. против бо́льших сторон треугольников.

Можно предложить учащимся построить треугольник по двум сторонам a и b, причем $a > b$, и углу A, лежащему против большей стороны. Строится отрезок $CA = b$ и в конце его A — угол A, а затем проводится окружность с центром в точке C радиусом, равным a; эта окружность пересечет сторону AB только в одной точке, так как $a > b$.

Если же сторона $a < b$ и требуется построить треугольник по двум сторонам a и b и углу A, лежащему против меньшей стороны a, то при проведении окружности с центром в точке C радиусом, равным a, могут иметь место следующие три случая:

1) окружность не пересечет стороны AB, и, следовательно, нельзя построить треугольник;

2) окружность коснется стороны AB, и тогда получится один треугольник и притом прямоугольный;

3) окружность пересечет сторону AB в двух точках, и, следовательно, можно построить два треугольника, удовлетворяющие заданным условиям.

Построение и разбор данной задачи имеется в стабильном учебнике. Рассмотрение задачи следует отнести ко времени, когда уделяется внимание детальному ознакомлению учащихся с решением задач на построение.

12. Чтобы различить указанные выше два приема совмещения двух треугольников: 1) перемещением одного треугольника в его плоскости до совмещения с другим треугольником и 2) поворотом одного треугольника в пространстве на 180° вокруг одной из его сторон, а затем и передвижением его в плоскости до совмещения его с другим треугольником, — будем говорить, что в первом случае треугольники — совместимо равные, во втором случае треугольники — симметрично равные.

Следует заметить, что две симметрично равные фигуры всегда можно привести к совмещению друг с другом после поворота одной из них в пространстве на 180°. В стереометрии, как мы увидим в дальнейшем, два симметрично расположенных тела совместить не всегда удается.

На рисунке 73 даны две симметрично расположенные треугольные неправильные пирамиды, у которых общим основанием является разносторонний треугольник. Все их элементы равны, однако сами пирамиды неравны, они не могут быть совмещены; они только равновелики.

Рис. 73.

В силу аналогичного явления нельзя надеть перчатку с левой руки на симметричную ей правую руку.

Необходимо иметь в виду, что при рассмотрении вопроса с учащимися не следует проводить аналогии между плоскими и пространственными фигурами; сравнение допустимо лишь тогда, когда учащиеся уже знакомы со стереометрией и могут критически отнестись к затронутым вопросам.

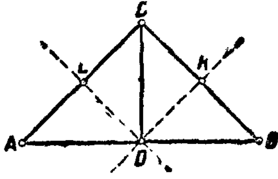


Рис. 74.

Симметрично равные фигуры при известных условиях могут быть и совместимо равными. Так, в равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC (рис. 74) высота его CD делит треугольник на два симметрично равных и совместимо равных треугольника. В самом деле, если повернуть треугольник CBD вокруг точки D в плоскости треугольника на 90° в направлении, противоположном движению часовой стрелки, то точка C совместится с точкой A, а точка B — с точкой C, и треугольник BDC совпадет с треугольником ADC. Следует при этом обратить внимание на то, что в данном случае совпали как раз несимметричные точки C и A. Такое явление можно наблюдать во всех тех случаях, когда ось симметрии CD делит фигуру ABC на две такие части — $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$, каждая из которых имеет свою ось симметрии — DK и DL.

Подробно останавливаться на этом вопросе, конечно, не следует; если позволяет время, то целесообразно уделить ему внимание при повторении.

В дальнейшем, при рассмотрении центральной симметрии, придется еще раз вернуться к этому вопросу.

Рис. 75.

В заключение можно указать на способ получения симметричных фигур. Сажают на листе бумаги кляксу и, пока чернила еще не успели высохнуть, перегибают лист и крепко прижимают друг к другу обе его части; на листе получается изображение некоторой симметричной фигуры, как это показано на рисунке 75.

В связи с рассмотрением осевой симметрии дается следующая формулировка свойства биссектрисы угла при вершине равнобедренного треугольника, включающая в себя все свойства равнобедренного треугольника: **биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника является его осью симметрии.**

§ 10. Основные задачи на построение.

Элементарные построения.

1. Фигуры, рассматриваемые в планиметрии, представляют собой комбинации из точек и линий. Изучая фигуры, мы должны быть уверены в том, что интересующую нас фигуру можно построить. Отметим, что зарождение задач на построение должно быть отнесено к тому периоду, когда люди начали заниматься геометрией.

Уже в глубокой древности средствами для построения служили линейка и циркуль. Линейкой пользовались уже в глубокой древности, как это видно из папируса Амеса, который относится к XVII в. до нашей эры. Циркулем, вероятнее всего, стали пользоваться позже. Упоминание о циркуле впервые встречается у Овидия; в своих „Метаморфозах" он рассказывает, что родственник Дедала и его ученик изобрел пилу и циркуль.

Указание на то, что при вычерчивании геометрических фигур можно пользоваться только циркулем и линейкой, мы находим у Платона. Это требование было скоро признано всеми; этим требованием руководствуемся и мы в настоящее время в элементарном курсе геометрии при построении геометрических фигур, и всякие другие требования принимаются нами в таких случаях как исключение.

Если классическая Греция выдвигала требование выполнять геометрические построения только с помощью линейки и циркуля, то в новейшее время были выдвинуты требования найти методы геометрических построений, пользуясь только одним каким-либо из указанных чертежных инструментов.

Так, Маскерони (1750—1800) выдвинул требование выполнять задачи на построение только с помощью циркуля. Штейнером (1796—1863) были даны методы решения задач на построение с помощью линейки и круга одного определенного радиуса, с показанным центром. К решению задач на построение указанными методами мы вернемся, теперь же укажем, что всякая задача на построение сводится к применению элементарных построений, возможность выполнения которых основана на аксиомах и теоремах геометрии.

Элементарные задачи на построение следующие:

1) через данные две точки провести прямую;

2) по данной точке — центру — и данному радиусу построить окружность;

3) взять точку на прямой или вне прямой;

4) взять точку на окружности, вне ее или внутри ее;

5) построить точку пересечения двух данных прямых (непараллельных);

6) построить точку пересечения прямой с окружностью;

7) построить точку пересечения двух окружностей.

Заметим, что при построении принято отмечать точку крестиком (×), рассматривая точку как место пересечения двух линий.

Знанием этих элементарных задач на построение обусловливается выполнение задач на построение: отложить на данной прямой от данной точки данный отрезок, построить сумму или разность двух или нескольких отрезков и т. п., построить в данном круге хорду данной длины при условии, что данная хорда не больше диаметра круга, и другие.

Основные задачи на построение.

2. После ознакомления учащихся с признаками равенства треугольников следует приступить к рассмотрению основных задач на построение; эти задачи следует расположить в следующем порядке:

1) построить угол, равный данному;

2) разделить данной угол пополам, или, вообще, на 2^n равных частей, где n — целое число;

3) провести перпендикуляр к данной прямой через данную точку (два случая);

4) разделить данный отрезок пополам или, вообще, на 2^n равных частей, где n — целое число;

5) построить треугольник по a, B и C;

6) » » » a, b » C;

7) » » » a, b » c;

8) » » » a, b » A, если $a > b$ (см. § 9).

Приступая к решению указанных задач на построение, нужно указать учащимся, что всякое построение обычно начинают с проведения произвольной прямой.

1) При решении первой задачи — построить угол, равный данному углу BAC, — вычерчивают произвольную прямую MN и отмечают на ней точку A_1 (рис. 76). Приняв вершину A данного угла и точку A_1 за центры, проводят произвольным радиусом сначала окружность, пересекающую стороны данного угла BAC в точках B и C, а затем окружность, пересекающую прямую MN в точках B_1 и B_2. Соединив точки B и C хордой, строят хорды B_1C_1 или B_2C_2, равные хорде BC, от точек B_1 и B_2 в окружности с центром в точке A_1; соединив затем точку A_1 с точками C_1 и C_2, получают два угла, $\angle B_1A_1C_1$ и $\angle B_2A_1C_2$, равные данному углу, как углы равных треугольников, лежащие против равных сторон, ибо $\triangle B_1A_1C_1 = \triangle BAC = \triangle B_2A_1C_2$ (ССС).

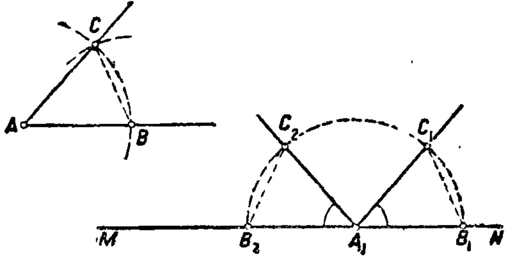


Рис. 76.

2) Вторая задача — разделить данный угол пополам — решается обычным способом. Следует отметить, что кроме отмеченной точки F (см. рисунок 70 стабильного учебника) пересечения двух вспомогательных окружностей имеется еще и вторая точка пересечения; искомая биссектриса должна пройти также и через нее; прохождение биссектрисы и через эту вторую точку служит проверкой правильности построения.

Следует указать, что необходимо приучить учащихся при выполнении ими чертежа кратко записать рядом с чертежом условия и требования задачи. Так, в данной задаче следовало бы записать: дан $\angle BAC$, разделить его пополам.

Также следует неукоснительно требовать от учащихся д о к а з а т е л ь с т в а правильности выполненных ими построений.

Приводим способ деления угла пополам, которым пользуются землемеры.

Требуется разделить пополам угол BAC (рис. 77). Провешивают и откладывают на сторонах угла от его вершины A равные отрезки AM и AN, а также AK и AL; провешивая затем прямые ML и NK, находят их точку пересечения O и соединяют ее с вершиной A; AO — искомая биссектриса.

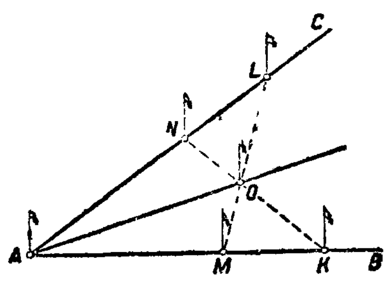


Рис. 77.

Построение это на бумаге выполняется так: приняв вершину A данного угла BAC за центр (рис. 78), проводят две концентрические окружности, пересекающие стороны угла в точках M и N и в точках K и L; точка O пересечения прямых ML и NK — вторая точка биссектрисы; первая — вершина A, центр окружностей.

Следует указать, что при построении достаточно только отметить точки M, N, K, L и O и не проводить ни полностью окружностей, ни даже дуг (рис. 79).

Прием этот хорош тем, что он дает возможность применить все три признака равенства треугольников при доказательстве построения.

Доказательство (рис. 78):

$\triangle ANK = \triangle AML$ (СУС), откуда $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$;
$\triangle NOL = \triangle MOK$ (УСС), откуда $\angle 5 = 6$;
$\triangle OAL = \triangle OAK$ (ССС), откуда $\angle 7 = \angle 8$,

и, следовательно, прямая AO — биссектриса.

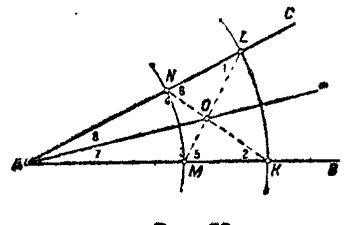


Рис. 78.

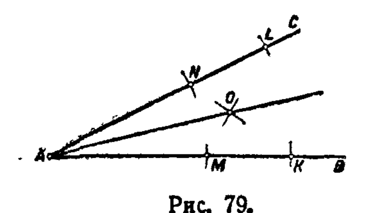


Рис. 79.

После показа деления угла на 2, 4, 8, 16 и т. д., вообще, на 2^n равных частей, где n — целое число, у учащихся, естественно, возникнет вопрос о делении угла на 3 равные части. Следует тогда указать учащимся, что такая задача была уже поставлена в глубокой древности, но, как теперь доказано, нельзя выполнить деление любого угла на 3 равные части с помощью циркуля и линейки. Вслед за этим показывается деление прямого угла на 3 равные части.

3) Задача о проведении перпендикуляра решается обычным способом; способ указан в учебнике.

4) Четвертая из указанных выше задач также решается обычным построением. Необходимо указать учащимся, что с делением отрезков на 3, 5, 6, 7 и т. д. равных частей они познакомятся в дальнейшем (при изучении параллельных прямых).

5) Построить треугольник по a, B и C.

Решение. Берут произвольную прямую MN и на ней — точку B (рис. 80). Отложив на прямой MN от точки B отрезок $BC=a$, строят по одну сторону от прямой MN углы B и C; стороны этих углов, не лежащие на прямой MN, пересекутся в точке A; получается искомый треугольник ABC, так как он удовлетворяет всем поставленным условиям задачи.

Небезынтересно задать для построения треугольника и такие два угла B и C, сумма которых больше $2d$: учащиеся убедятся, что при этом условии третьей вершины A треугольника получить нельзя; то же самое будет и в том случае, если $\angle B=\angle C=d$ или $\angle B+\angle C=2d$.

Решение и анализ этой задачи можно отнести к тому времени, когда учащиеся или уже знают, что сумма углов треугольника равна $2d$, или уже проработали теорему: во всяком треугольнике сумма двух любых внутренних углов меньше $2d$. При этом условии учащиеся могут пояснить, что треугольник можно построить по данным элементам a, B и C только тогда, если $\angle B+\angle C<2d$.

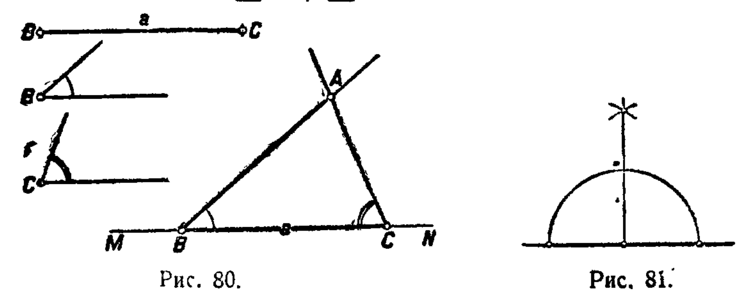


Рис. 80. Рис. 81.

6) При построении треугольника по двум сторонам и углу между ними указывается, что построение всегда возможно, если данный угол меньше развернутого.

7) Построение треугольника по трем данным сторонам не вызывает каких-либо затруднений. Надо только разъяснить учащимся, что построение всегда возможно, если бо́льшая сторона a треугольника больше разности двух других сторон b и c и меньше их суммы, т. е. если $b-c<a<b+c$ при $a\geqq b\geqq c$.

Отметим еще, что при разборе задачи на деление угла пополам можно также поставить задачу на деление пополам развернутого угла. В последнем случае задача сводится к тому, чтобы через данную на прямой точку провести прямую, перпендикулярную к данной прямой, так как всякую прямую с отмеченной на ней точкой можно рассматривать как развернутый угол (рис. 81), вершина которого и есть отмеченная точка.

После построения треугольника по элементам: 1) a, B, C, 2) a, b, C и 3) a, b, c следует предложить учащимся построить треугольник по трем заданным углам, если, например, $\angle A=40°$, $\angle B=60°$ и $\angle C=80°$. Учащиеся, сравнивая полученные ими построения, убеждаются, что можно построить бесчисленное множество неравных треугольников, углы которых равны заданным. Этот опыт должен привести учащихся к выводу, что для равенства двух треугольников необходимо, чтобы в число трех заданных элементов входила хотя бы одна сторона. Отсюда следует, что равенство стороны одного треугольника стороне другого треугольника является признаком, необходимым для равен-

ства треугольников. Приведенные три признака равенства треугольников являются **достаточными**: элементы a, B и C; a, b и C; a, b и c определяют один единственный треугольник или, как говорят, определяют треугольник **однозначно**.

Рассмотрим пример из арифметики: чтобы число делилось без остатка на 6, необходимо, чтобы оно было четным; однако это признак только необходимый, но недостаточный; необходимым и достаточным является признак: *на 6 делятся все четные числа, сумма цифр которых делится на 3.*

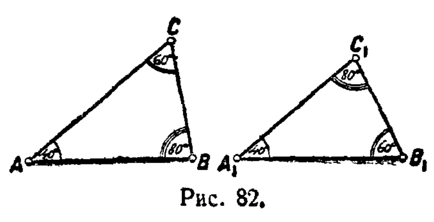


Рис. 82.

Следует подчеркнуть, что в первом признаке равенства треугольников заданные углы — углы, прилежащие к данной стороне. Действительно, можно построить два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, у которых сторона $AB = A_1B_1$ и два угла одного равны двум углам другого, и все же такие треугольники оказываются неконгруэнтными, неравными (рис. 82), так как в данном случае взяты несоответственно расположенные элементы.

Зависимость между углами и сторонами треугольника.

3. С одной из зависимостей между сторонами и углами треугольника, указывающей, что в треугольнике против равных сторон лежат равные углы, учащиеся знакомятся при выводе свойств равнобедренного треугольника. К рассмотрению остальных зависимостей они подводятся после разбора теоремы о внешнем угле треугольника.

Следует уделить внимание теореме: **во всяком треугольнике сумма двух любых внутренних углов меньше $2d$.**

Теорема приведена в стабильном учебнике.

Обратная теорема.

4. В этом разделе учащиеся впервые в курсе геометрии встречаются с обратными теоремами. Необходимо дать четкое понятие о сущности обратной теоремы. Обычное определение обратной теоремы как теоремы, в которой условием является заключение прямой теоремы, а заключением — условие прямой теоремы, в отдельных случаях может оказаться неверным, а потому это определение требует еще некоторого дополнения.

Рассмотрим пример. Дана теорема (прямая): **если даны два смежных угла, то сумма их равна $2d$**; если формулировать обратную теорему так: **если сумма двух углов равна $2d$, то эти углы — смежные,** то она окажется неверной; действительно, существует бесчисленное множество углов, сумма которых равна $2d$, которые, однако, не являются углами смежными. Так, на рисунке 83 даны углы ABC и CDE; их сумма равна $2d$, однако эти углы — не смежные. Если к данному условию присоединить еще условие, что данные углы — **прилежащие**, то обратная теорема будет верна.

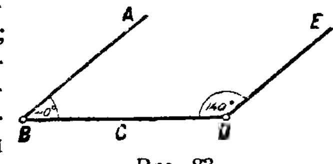


Рис. 83.

Другой пример. Дана теорема (прямая): **если два угла противоположны, то они равны**; теорема, ей обратная, в формулировке: **если два**

угла равны, то они противоположны, неверна; на самом деле, можно взять сколько угодно равных углов, которые все же не будут противоположными. Обратная теорема будет верна, если дополнить условие и читать ее в такой формулировке:

если даны два равных неприлежащих угла, у которых: 1) общая вершина, 2) две стороны составляют одну прямую и 3) две другие стороны расположены по обе стороны от этой прямой, то углы эти — противоположные, т. е. другие две их стороны составляют одну прямую.

Теорема доказывается способом от противного.

Дано: $\angle ABC = \angle EBD$, EBC — прямая (рис. 84).

Треб. док.: $\angle ABC$ и $\angle EBD$ — углы противоположные, ABD — прямая.

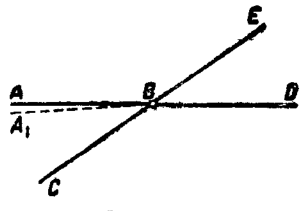


Рис. 84.

Доказательство. Допустим, что данные углы — не противоположные и BA не есть продолжение BD. Пусть продолжением BD за вершину B будет BA_1; в таком случае $\angle EBD$ и $\angle CBA_1$ — углы противоположные, и на основании прямой теоремы $\angle EBD = \angle CBA_1$. Согласно условию $\angle EBD = \angle ABC$; сопоставляя оба равенства, имеем: $\angle ABC = \angle CBA_1$, иначе говоря, $\angle A_1BC$, часть угла ABC, равна всему углу ABC, что невозможно; а потому допущение, что BA не есть продолжение BD, неверно; следовательно, BA — продолжение BD и данные углы — противоположные.

Противоположная теорема.

5. Кроме обратных теорем рассматривают еще и теоремы противоположные; так называются теоремы, получаемые из прямой или обратной теоремы путем отрицания условия и заключения. Пример противоположных теорем:

Если два угла не противоположны, то они и не равны (противоположная прямой теореме).

Если два угла не равны, то они и не противоположны (противоположная обратной теореме).

Первая из них неверна, вторая верна.

Нужно указать, что теорема, противоположная прямой, может быть и неверной, теорема же, противоположная обратной, всегда верна, если только верна прямая теорема.

Перпендикуляр и наклонная.

6. Устанавливается зависимость между перпендикуляром и наклонными, проведенными из одной точки к данной прямой, на основании следствия: **сумма двух углов треугольника меньше $2d$** и признаков равенства прямоугольных треугольников. Этот раздел следует проходить в том именно порядке, как это указано в стабильном учебнике. Необходимо, чтобы учащиеся уяснили себе, что перпендикуляр и наклонные проводятся: 1) из одной и той же точки, лежащей вне прямой, и 2) к одной и той же прямой. Необходимость указанных замечаний поясняется на примерах.

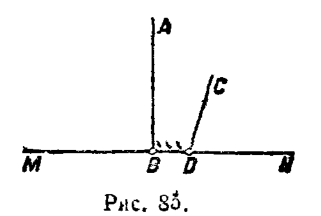


Рис. 85.

Примеры. 1. Дан перпендикуляр AB (рис. 85), проведенный к прямой MN из

точки A, и наклонная CD, проведенная из точки C к той же прямой MN; $AB > CD$.

2. Дан перпендикуляр A_1B_1 к прямой M_1N_1 (рис. 86) и наклонная A_1B_2 к прямой M_2N_2; эти линии не удовлетворяют „теореме“: перпендикуляр больше наклонной.

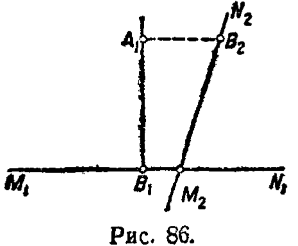


Рис. 86.

Имеет значение и то обстоятельство, что точка должна лежать вне данной прямой. В самом деле, перпендикуляр AB и наклонная AD (рис. 87), проведенные из одной и той же точки A на прямой MN к последней, могут оказаться равными.

Рис. 87.

Подобный разбор вопроса приучает учащихся следить за четкостью формулировок теорем: они должны знать, что при формулировке теоремы каждое слово имеет определенное значение; наряду с этим как в определении, так и в теореме не должно быть ничего лишнего. Так, например, формулировка теоремы: если из данной точки к данной прямой проведены наклонные, проекции которых на данную прямую равны, то равны и наклонные (рис. 88) — неполная, если предварительно не сделано указание, что данная точка лежит вне данной прямой, и это приводит к неправильному представлению о равенстве наклонных AB, AC и AD, у которых одна и та же проекция AO; на самом деле, это неверно, хотя наклонные к данной прямой и проведены из одной и той же точки A, но эта точка лежит не вне данной прямой MN, а на ней.

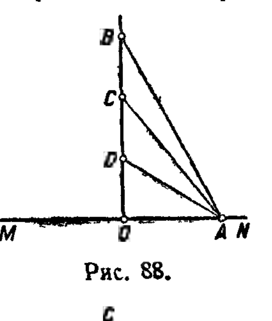


Рис. 88.

Если учащийся дает неправильное определение или неверно формулирует теорему, то не следует ограничиваться указанием, что им дана неправильная формулировка; необходимо, чтобы преподаватель показом соответствующего чертежа разъяснил учащемуся, почему его определение или формулировка неправильны и каков должен быть правильный ответ. Так, если учащийся, давая определение медианы, скажет: медианой называется линия, делящая сторону пополам, — то следует его ответ иллюстрировать чертежом, данным на рисунке 89; линия MN делит сторону AB пополам, но она не есть медиана. При виде чертежа учащийся поспешит исправить свою „ошибку“, обратив внимание на то, что MN на рисунке 89 — кривая линия, и скажет: „прямая, делящая сторону пополам“; однако и этот ответ неверен; на рисунке 90 дается иллюстрация его ответа. Чертеж, наконец, наводит учащегося на определение: медиана — прямая, проведенная из вершины треугольника к середине противолежащей стороны; чаще под медианой подразумевается

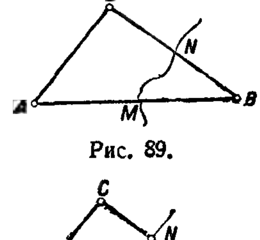


Рис. 89.

Рис. 90.

отрезок, концами которого служат вершина треугольника и середина противолежащей ей стороны. Это определение позволяет учащемуся сознательно подойти к проведению медианы: он сначала найдет середину стороны, а затем уже соединит середину стороны с вершиной противолежащего ей угла.

Следует обратить внимание на двойственное значение понятий „перпендикуляр" и „наклонная": перпендикуляр и наклонная рассматриваются или как отрезки или как прямые. Из разбора зависимости между перпендикуляром и наклонной, проведенными из одной точки, лежащей вне данной прямой, к этой прямой, ясно, что под перпендикуляром и под наклонной мы подразумеваем о т р е з к и, концами которых служат точка вне прямой и соответствующая точка на данной прямой, между тем, однако, перпендикуляром к данной прямой мы называем и п р я м у ю, образующую с данной прямой прямой угол, точно так же, как за наклонную к данной прямой принимается и вообще прямая образующая с данной прямой острый или тупой угол.

Необходимо еще остановиться на понятии о „кратчайшем" расстоянии от точки до прямой и указать, что о кратчайшем расстоянии уже была речь, когда рассматривалось кратчайшее расстояние между двумя точками. Следует указать, что, говоря о расстоянии, мы в геометрии всегда имеем в виду кратчайшее, наименьшее расстояние, это должно проходить красною нитью через весь курс геометрии. Понятие о расстоянии, понимаемое в указанном смысле, должно быть твердо усвоено учащимися.

Следует в этом же разделе рассмотреть еще два признака равенства прямоугольных треугольников: 1) по гипотенузе и острому углу, 2) по гипотенузе и катету. Второй из последних двух признаков равенства прямоугольных треугольников можно и опустить, рассматривая его как следствие 4-го признака равенства треугольников, если только этот признак был в свое время рассмотрен.

Задачи на построение, основанные на равенстве треугольников.

7. Приводим задачи на построение более сложного характера, требующие детального разбора и основанные на элементарных задачах на построение. При решении задач на построение необходимо требовать от учащихся четкого выполнения построения заданной фигуры.

Следует приучать учащихся отдельно выписывать элементы, заданные для построения фигуры.

Учащимся должно быть указано, что линии, заданные в условии задачи, следует проводить с п л о ш н ы м и т о н к и м и линиями, вспомогательные линии — п у н к т и р о м, линии, являющиеся основными для искомой фигуры, — с п л о ш н ы м и ж и р н ы м и линиями.

Можно рекомендовать учащимся при вычерчивании искомой фигуры пользоваться цветными карандашами.

1. Дана прямая MN и две точки A и B, лежащие по одну сторону от прямой, на неодинаковом расстоянии от нее. Найти на прямой MN такую точку C, чтобы прямые CA и CB образовали с прямой MN равные углы.

Проводится прямая MN и вне ее по одну сторону отмечаются на плоскости чертежа на разных расстояниях от прямой две точки A и B

так, что $AA_1 > BB_1$ (рис. 91). Спрашивается, как найти на данной прямой MN точку C, чтобы прямые CA и CB образовали с прямой MN равные углы.

Возможно, что учащиеся догадаются провести прямую, проходящую через данные точки A и B до пересечения ее с прямой MN в точке C; тогда точка C — искомая точка, так как $\angle MCA = \angle MCB$ и, следовательно, прямые CA и CB действительно образуют с прямой MN один и тот же угол.

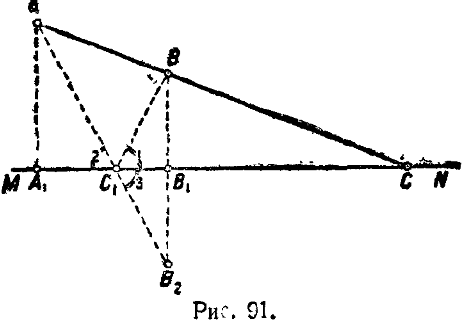


Рис. 91.

Если учащиеся сами не догадаются провести прямую ABC, то следует предложить им провести эту прямую и указать, что данными двумя точками A и B определяется прямая ABC; этой прямой, быть может, придется воспользоваться при решении задачи. Точка пересечения C оказывается лежащей вне отрезка A_1B_1; понятно, что концевые точки A_1 и B_1 отрезка A_1B_1 служат проекциями точек A и B.

Возникает вопрос, нет ли еще другой точки, между точками B_1 и A_1 удовлетворяющей условию задачи. Допустим, что такая точка существует, пусть это будет некоторая точка C_1; соединив точку C_1 с A и B, мы согласно условию задачи должны иметь, что $\angle B_1C_1B = \angle A_1C_1A$, или $\angle 1 = \angle 2$. Если продолжить затем AC_1 (или BC_1) за точку C_1 до пересечения с продолжением перпендикуляра BB_1 (или AA_1) в точке B_2 (или A_2), то $\angle 2 = \angle 3$ как углы противоположные, и тогда $\angle 3 = \angle 1$; последнее равенство означает, что C_1B_1 — биссектриса треугольника BC_1B_2 и что C_1B_1 — высота треугольника; следовательно, треугольник BC_1B_2 — равнобедренный и $BB_1 = B_1B_2$ и C_1B_1 — медиана. Такой анализ показывает, каким построением найти точку C_1.

Следует провести из точки B прямую $BB_1 \perp MN$ и продолжить ее за точку B_1 на расстояние $B_1B_2 = BB_1$. Если затем соединить точку B_2 с точкой A, то получится искомая точка C_1 — точка пересечения прямой MN с прямой B_2A.

После того как построение выполнено, необходимо привести доказательство того, что полученная построением фигура удовлетворяет условиям задачи.

В самом деле, $\angle 3 = \angle 2$ как противоположные, и, если соединить точку C_1 с точкой B, то и $\angle 3 = \angle 1$ как углы при вершине равнобедренного треугольника; отсюда $\angle 1 = \angle 2$. Условие задачи удовлетворяется.

Эта задача, как видно, допускает два решения: имеются две точки — C и C_1, удовлетворяющие требованию задачи.

Если бы учащиеся были знакомы с параллельными линиями, то можно было бы поставить вопрос в более общей форме и задать две как угодно расположенные относительно прямой MN точки A и B; но тогда нужно было бы рассмотреть и тот случай, когда A и B отстоят на равное расстояние от MN, т. е. когда $AB \parallel MN$; в последнем случае точка C_1 лежала бы на перпендикуляре, проходящем через середину AB.

Если задать, что обе точки лежат по разные стороны от прямой *MN* и не на одном к ней перпендикуляре, то нужное построение легко усматривается из рисунка 92.

В случае, когда обе точки лежат на одном перпендикуляре, имеется, как и в случае параллельности *AB* и *MN*, только одно решение.

Эта задача представляет собою интерес еще и в том отношении, что позволяет доказать, что из всех точек прямой *MN* точка C_2 — единственная точка, для которой сумма расстояний ее от данных точек *A* и *B*, т. е. C_2A+C_2B, — наименьшая.

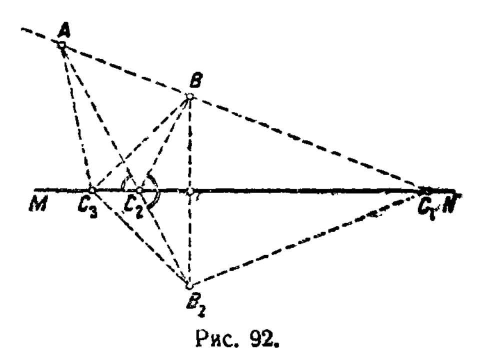


Рис. 92.

В самом деле, взяв на прямой *MN* произвольную точку C_3 (рис. 92) и соединив ее с точками *A*, *B* и B_2, находим из треугольника AB_2C_3:

$$C_2A+C_2B_2<C_3A+C_3B_2, \quad \text{или} \quad C_2A+C_2B<C_3A+C_3B.$$

Точно так же из треугольника AB_2C_1 имеем:

$$C_2A+C_2B_2<C_1A+C_1B_2, \quad \text{или} \quad C_2A+C_2B<C_1A+C_1B.$$

Выполненное решение позволяет формулировать следующую задачу:

2. Найти на данной прямой *MN* точку *C* так, чтобы сумма ее расстояний от двух данных точек *A* и *B*, лежащих вне прямой *MN*, была наименьшей.

Понятно, что подобного рода задачи учащиеся решают в классе с помощью преподавателя, и, конечно, задачи эти не могут быть даны учащимся для самостоятельной проработки.

8. К основным задачам на построение относятся также задачи на построение прямоугольных треугольников: а) по двум данным катетам, б) по катету и прилежащему острому углу, в) по катету и гипотенузе, г) по гипотенузе и острому углу. Решение этих задач несложно. Последние две задачи надо решать, когда пройдены последние два признака равенства прямоугольных треугольников.

Основными считаются также задачи на построение равнобедренного треугольника: а) по боковой стороне и углу при вершине, б) по основанию и углу при основании, в) по основанию и боковой стороне, ибо все эти задачи аналогичны основным задачам на построение треугольника (СУС, УСУ, ССС).

Основной является и задача на построение равностороннего треугольника по данной стороне (ССС).

Все эти задачи могут быть предложены учащимся в качестве самостоятельной работы на дому после того, как проработаны общие основные задачи на построение треугольника.

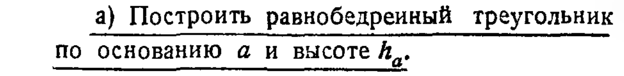
3. После этого рассматривается построение равнобедренных треугольников по их элементам, в число которых входят и неосновные; при построении используются свойства равнобедренного треугольника. К за-

дачам указанного типа относятся задачи на построение равнобедренного треугольника: а) по основанию a и высоте h_a, б) по боковой стороне b и высоте h_a, в) по основанию a и боковой высоте h_b, г) по высоте h_a и углу при вершине A.

Чтобы приучить учащихся самостоятельно отыскивать пути решения задач на построение, следует требовать от них предварительного анализа предлагаемой задачи, затем построения ее, доказательства, что построение выполнено с учетом всех данных, и, наконец, исследования, при каких условиях решение задачи возможно и сколько решений допускает задача.

Рис. 93.

В качестве примера приводится первая из указанных выше задач:


а) Построить равнобедренный треугольник по основанию a и высоте h_a.

Анализ задачи. Допустим, что задача решена и треугольник построен по данному основанию a и высоте h_a (рис. 93).

Высота h_a делит равнобедренный треугольник ABC на два равных прямоугольных треугольника, а потому задача сводится к построению прямоугольного треугольника ADB по двум данным катетам h_a и $\frac{a}{2}$.

Построение. Строим по данным h_a и $\frac{a}{2}$ прямоугольный треугольник ADB и продолжаем катет BD за вершину D на расстояние $DC=BD$; образовавшаяся точка C — третья вершина искомого треугольника. Соединив точку C с вершиной A, получаем искомый треугольник ABC.

Доказательство. Построенный треугольник — искомый, он удовлетворяет условиям задачи: он равнобедренный, $AB=AC$, основание $BC=a$ и высота $AD=h_a$.

Исследование. Задача сводится к построению прямоугольного треугольника ADB по двум данным его катетам, а потому она всегда возможна и имеет одно только решение.

б) Вторая задача сводится к построению прямоугольного треугольника по гипотенузе b и катету h_a, с последующим дополнением построенного прямоугольного треугольника до равнобедренного; задача возможна, если $h_a < b$.

в) Третья задача сводится к построению прямоугольного треугольника по гипотенузе a и катету h_b (рис. 94); для нахождения третьей вершины проводится серединный перпендикуляр MA, который пересекается с продолжением катета CD в точке A — третьей вершине искомого треугольника; задача возможна, если $h_b < a$.

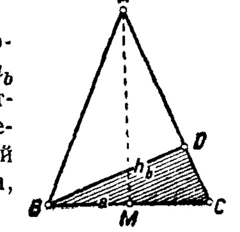


Рис. 94.

г) Наконец, четвертая задача сводится к построению прямоугольного треугольника по катету h_a и прилежащему острому углу, равному $\frac{A}{2}$ с дополнением полученного прямоугольного треугольника до равнобедренного; задача всегда возможна. Последнюю задачу можно решить и иначе, а именно: построить угол A,

равный данному, провести его биссектрису AD, отложить на ней отрезок AD, равный h_a, и затем через точку D провести $BC \perp AD$; тогда точки B и C пересечения BC со сторонами угла дадут остальные вершины B и C искомого равнобедренного треугольника.

После проработки этих задач могут быть решены следующие задачи на построение треугольников: построить треугольник по

1) a, b и h_a; 2) a, b и m_a;
3) m_a, h_a и a; 4) a, b и h_c;
5) b, h_a и m_b; 6) a, B и β_B и др.

Приводим анализ и подробное решение задачи:

1) Построить треугольник по a, b и h_a.

Запись:

Дано: a, b и h_a.
Построить треугольник.

Анализ. Пусть задача решена и искомый треугольник ABC построен (рис. 95); $AD = h_a$ — высота треугольника. Из внимательного рассмотрения чертежа учащиеся должны усмотреть возможность построения части треугольника, а именно — треугольника ADC, по гипотенузе $AB = b$ и катету $AD = h_a$; треугольник ADC затем может быть дополнен до искомого треугольника ABC. В самом деле, построением треугольника ADC определяются две вершины A и C искомого треугольника ABC; его третья вершина B лежит на продолжении стороны CD на расстоянии $CB = a$ от вершины C.

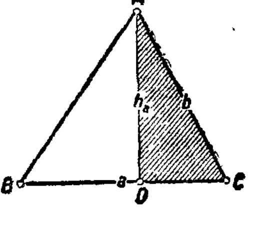


Рис. 95.

Когда выполнен анализ задачи, учащиеся приступают к построению.

Построение. На произвольной прямой MN отмечают произвольную точку D и проводят через нее к прямой MN перпендикуляр DA. На этом перпендикуляре откладывают отрезок $DA = h_a$, принимают затем точку A за центр и радиусом $AC = b$ проводят окружность; последняя пересечет прямую MN в точке C (рис. 96).

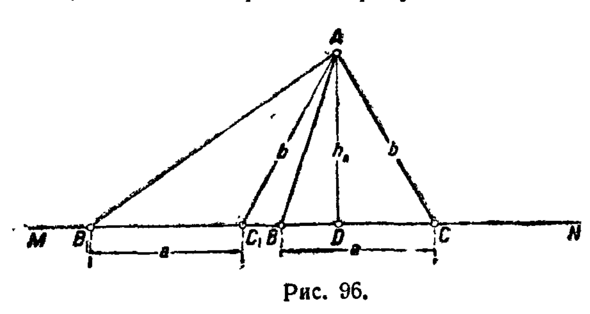


Рис. 96.

Когда прямоугольный треугольник ADC построен и, таким образом, найдены две вершины A и C искомого треугольника, продолжают сторону CD за точку D и откладывают от точки C отрезок $CB = a$; точкой B определяется третья вершина искомого треугольника; наконец, соединение точки B с точкой A дает искомый треугольник ABC.

Когда выполнено построение, учащийся должен доказать, что фигура, полученная данным построением, удовлетворяет условиям задачи.

Доказательство. Действительно, построенный треугольник ABC удовлетворяет условиям задачи: данные в условии элементы a, b и h_a являются элементами построенного треугольника.

После доказательства необходимо исследовать, при каких условиях решение задачи возможно.

Исследование. Прямоугольный треугольник ADC может быть построен лишь при условии, если $b > h_a$, а в таком случае окружность радиуса $AC = b$ пересечет прямую MN в двух точках C и C_1 (рис. 96); если затем отложить от точки C_1 отрезок $C_1B_1 = a$, то получится еще один треугольник, а именно — треугольник AC_1B_1, который, как и треугольник ACB, удовлетворяет условиям задачи. Итак, при $b > h_a$ задача допускает два решения: остроугольный треугольник ACB и тупоугольный треугольник AC_1B_1. В этом случае, когда $b = h_a$, окружность и прямая MN имеют только одну общую точку, а потому получается лишь одно решение — прямоугольный треугольник, катеты которого равны h_a и a; наконец, если $b < h_a$, то задача невозможна, так как окружность радиуса b не пересечет прямой MN.

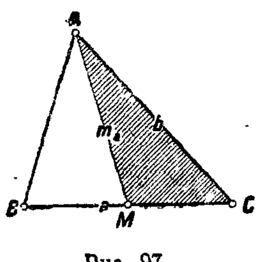


Рис. 97.

Аналогично следует проводить разбор и остальных приведенных задач.

2) Вторая из них сводится к построению треугольника по трем сторонам $\frac{a}{2}$, b и m_a (рис. 97). Третья вершина B треугольника находится продолжением стороны CM на расстояние $MB = \frac{1}{2}a$. Задача возможна при условии, если каждая из сторон m_a, b и $\frac{a}{2}$ вспомогательного треугольника удовлетворяет соответствующим неравенствам, которые существуют между сторонами треугольника.

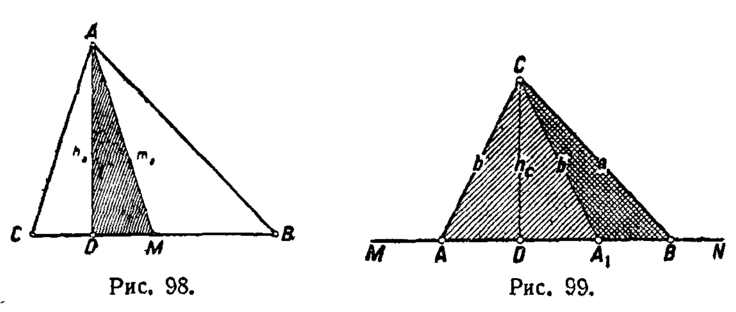


Рис. 98. Рис. 99.

3) Третья задача сводится к построению прямоугольного треугольника по катету h_a и гипотенузе m_a (рис. 98). Отложив затем на продолжении MD отрезки $MB = MC = \frac{a}{2}$, находим другие две вершины B и C треугольника. Задача возможна при $h_a \leq m_a$. Если $h_a = m_a$, то треугольник — равнобедренный.

4) Четвертая задача может быть дана для самостоятельной работы; она сводится к построению перпендикуляра h_c к произвольной прямой MN (рис. 99) и двух наклонных, расположенных по одну или обе

стороны от перпендикуляра. Задача всегда возможна, если $h_c < a$ и $h_c < b$, и дает два решения: треугольники ABC и A_1BC. Другие два возможных треугольника являются симметричными. При $h_c = b$ решение одно — треугольник прямоугольный; при $a = b$ и $h_c < a$ — одно решение.

5) Пятая задача сводится к построению прямоугольного треугольника по катету h_a и гипотенузе b (рис. 100). Третья вершина должна лежать на окружности радиуса m_b, с центром в середине стороны $AC = b$, и на продолжении стороны CD, т. е. в точке их пересечения B или B_1. Задача допускает два решения: треугольник ABC или треугольник AB_1C, и возможна при $h_a \leqq b$ и $m_b \geqq \frac{h_a}{2}$. В самом деле, из рисунка 100 видно, что $h_a \leqq b$ и m_b, вообще говоря, больше, чем $\frac{1}{2} h_a$, где $\frac{1}{2} h_a = MN$ — средней линии треугольника ADC, а при $m_b = \frac{1}{2} h_a$ получается тупоугольный треугольник ANC, медиана которого $MN = \frac{1}{2} h_a$. При $m_b < \frac{1}{2} h_a$ треугольник построить нельзя, ибо тогда окружность с центром в точке M радиуса m_b не пересечет сторону a треугольника.

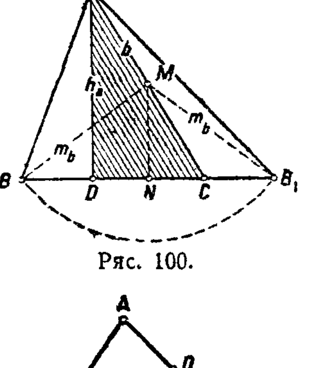


Рис. 100.

При $h_a = b$ треугольник — прямоугольный, решение одно.

6) Шестая задача сводится к построению треугольника по двум сторонам a и β_B и углу между ними $\frac{B}{2}$ (рис. 101). Дополнив $\angle CBD = \frac{B}{2}$ до полного угла B, находим третью вершину A — точку пересечения BA и продолжения CD. Задача всегда возможна при $B < 180°$ и дает одно решение.

Рис. 101.

Решение этих задач должно приучить учащихся к предварительному краткому разбору, или анализу, задачи. Учащиеся должны уяснить себе, что нередко в зависимости от данных искомый треугольник находится построением сперва некоторой части его, построение которой сводится к одной из основных задач на построение. Необходимо приучать учащихся к исследованию полученных решений, т. е. к выяснению, возможно ли решение, при каких условиях оно возможно и сколько решений допускает задача. Особо сложные задачи на этой ступени решать не следует, число же доступных учащимся задач на построение должно быть весьма значительно.

Задачи с препятствиями.

9. Обычно все задачи на построение решаются в предположении, что проводимые прямые могут быть безгранично продолжены в обе стороны, да и сама плоскость, на которой вычерчивается та или иная фигура, не имеет границ, т. е. мыслится безгранично продолженной во все стороны. Кроме того ставится условие, что при построении пользуются только циркулем и линейкой; при этом мыслится, что по линейке можно провести неограниченную прямую, а циркулем — окружность любого радиуса.

На практике, однако, приходится иметь дело с линейкой ограниченной длины, с циркулем, которым нельзя провести окружность любого радиуса, и с листом бумаги, на котором воспроизводится чертеж, представляющий собою ограниченную часть плоскости.

Все такие ограничения должны быть преодолены при фактическом выполнении построения; особенно это относится к так называемым задачам на построение с препятствиями, представляющим для учащихся значительный интерес.

Так называются задачи на построение, решение которых вследствие встречающихся „препятствий“ нельзя выполнить обычными методами, знакомыми учащимся. „Препятствия“ эти заключаются в том, что некоторые точки или линии недоступны или „неудобно“ расположены, или же сама плоскость, на которой должно быть выполнено построение, ограничена, или, наконец, учащийся ограничен правом пользоваться некоторыми чертежными приборами, или же в его распоряжении нет некоторых нужных ему приборов.

Необходимо отметить, что при выполнении геометрического построения можно пользоваться помимо циркуля и линейки также и иными чертежными приборами, как-то: чертежным треугольником, двусторонней линейкой, ребра которой представляют собою „офизиченные“ параллельные прямые, кругом постоянного радиуса и т. п. В каждом отдельном случае следует при этом указывать, какими чертежными приборами выполнено построение, если не пользовались только циркулем и односторонней линейкой.

Считаем необходимым заметить, что при построении перпендикуляра к данной прямой следует пользоваться линейкой и чертежным треугольником; точность такого построения отнюдь не меньшая, чем если пользоваться при построении перпендикуляра к прямой циркулем и линейкой, а между тем в последнем случае затрачивается для построения значительно больше времени.

Переходя к задачам с препятствиями, следует сказать, что отмечаемые в задаче препятствия служат для учащихся стимулом к их преодолению, повышают интерес к самой задаче и развивают в учащихся инициативу, самодеятельность и находчивость.

Препятствия, встречающиеся в задачах, должны быть по возможности естественными и непридуманными искусственно. Учащиеся, решившие уже несколько задач с препятствиями, приобретают к ним вкус и нередко сами придумывают задачи с препятствиями; часто приходится от них слышать: „А как быть, если поставить такое-то препятствие?“

При решении задач с препятствиями преподаватель должен быть всегда готовым дать исчерпывающий ответ на вопросы учащихся. В том случае, когда преподаватель не может сразу дать ответ на тот или иной вопрос, следует вопрос разобрать вместе с учащимися и отнюдь не отделываться никчемными объяснениями, не проливающими свет на заданный вопрос.

Опыт показывает, что учащиеся обычно затрачивают значительное время на обдумывание решения задач с препятствиями, им приходится помочь постановкой наводящих вопросов, и после решения некоторого числа задач они научаются и сами находить верные пути их решения

Слишком большое увлечение подобного рода задачами нецелесообразно, да и вряд ли на это хватит классного времени.

Примеры задач.

1) Даны две точки, A и B; провести с помощью циркуля и линейки через них прямую, если имеющаяся линейка недостаточно длинна для этой цели.

Примем точки A и B (рис. 102) за центры двух равных окружностей и выберем их радиусы так, чтобы окружности пересекались. Приняв теперь точки пересечения M и N за центры, засекаем радиусом, бóльшим половины расстояния MN, дуги, пересекающиеся в точках C и D; тогда точки A, B, C и D лежат на одной прямой; проводим через них по линейке искомую прямую.

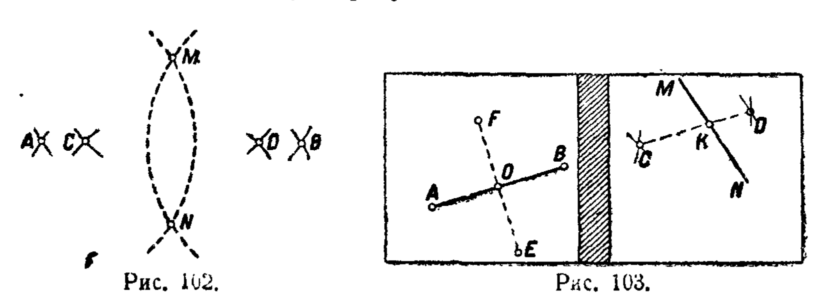


Рис. 102. Рис. 103.

2) Прямую AB продолжить до пересечения с другой прямой MN, если между прямыми имеется препятствие.

Пусть на доске имеется выдающаяся посредине ее планочка, мешающая продолжить прямую AB (рис. 103). Строим сначала $FE \perp AB$ и откладываем $OF = OE$. Приняв затем E и F за центры, засекаем произвольным радиусом две дуги так, чтобы получилась по другую сторону препятствия точка C, и другим радиусом — чтобы получилась точка D; тогда CD — продолжение AB.

3) Провести к данному отрезку через его середину перпендикуляр, если середина отрезка недоступна.

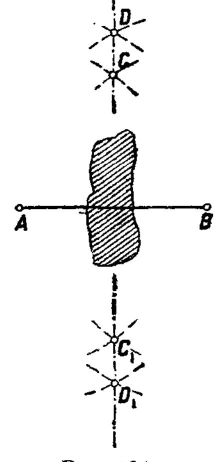


Рис. 104.

Принимая точки A и B за центры (рис. 104), проводим две пересекающиеся в точках C и C_1 окружности; кроме того проводим еще две пересекающиеся окружности другим радиусом; тогда $DC \perp AB$ и $D_1C_1 \perp AB$, а потому DC и D_1C_1 составляют одну прямую, проходящую через середину AB перпендикулярно к AB.

Следует иметь в виду, что при решении задач на построение с препятствиями учащиеся в процессе самой работы нередко ставят вопросы, которые по существу приводят к новым задачам на построение с иными препятствиями. Преподаватель в данном случае должен не только найти четкий ответ на подобного рода вопросы, но и уметь из робких и иногда неясных вопросов и предложений учащихся выделить все то,

что следовало бы рассмотреть. Внимательное отношение к запросам учащихся и удовлетворение их запросов, несомненно, побудят учащихся к более серьезному, внимательному и любовному отношению к делу.

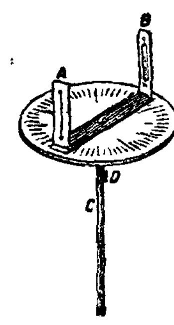


Рис. 105.

Не следует пренебрегать некоторыми практическими вопросами, связанными с измерением на местности в поле, тем более, что учащиеся уже немного знакомы с провешиванием линий и их измерением, а также с угломером, который нередко они имеют возможность изготовить собственными силами в школьной мастерской.

Чтобы измерить углы в горизонтальной плоскости, можно воспользоваться прибором, изображенным на рисунке 105. Его можно построить следующим образом: вырезают из бумаги круг с делениями на градусы (можно склеить два бумажных транспортира) и наклеивают его на доску, горизонтальная установка которой проверяется уровнем; доска прикрепляется с помощью винта к палке или к треножнику, например от фотоаппарата; вокруг центра круга вращается линейка AB с диоптрами на концах; эта часть прибора называется алидадой.

Способ пользования им очень прост. Пусть, например, требуется измерить какой-нибудь угол LMN (рис. 106) на местности (острый или тупой); поставив прибор так, чтобы центр его круга O и вершина M измеряемого угла лежали на отвесе, визируем сначала веху L на одной стороне угла и отмечаем соответствующее этому направлению деление на круге; затем поворачиваем алидаду вокруг точки O до тех пор, пока AB не займет такое положение CD, что точки C, D и конец вехи N будут находиться на одной прямой. Разность делений на круге и даст величину искомого угла.

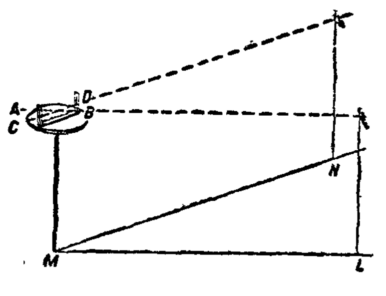


Рис. 106.

Если угломерный прибор устроен, как показано на рисунке 105, то его легко использовать и для измерения углов в вертикальной плоскости — стоит только повернуть на 90° вокруг точки C весь круг вместе с верхней частью палки, к которой он прикреплен, и затем зажать винтом D. В таком виде он может заменить собою и эклиметр и, конечно, также эккер (рис. 107).

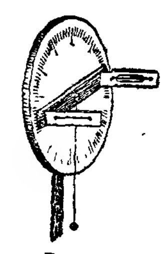


Рис. 107.

Задача из землемерной практики, а именно — деление угла пополам, была рассмотрена выше; рассмотрим еще несколько задач.

Укажем все же, что, приступая к решению задач, относящихся к землемерию, полезно предварительно наглядно показать учащимся приемы провешивания прямых линий и измерения углов, используя для этой цели горизонтальную крышку большого стола в качестве плоскости, на которой производится измерение. Когда учащиеся уже ознакомились с необходимыми приемами, следует решить две-три задачи на дворе школы или в поле. Необходимо при этом разбить класс на

небольшие группы, по 4—5 человек в каждой, и дать каждой группе определенное задание: одной — провешивание прямых, другой — измерение расстояний, третьей — измерение углов и т. д. и, наконец, собранный материал обрабатывается также отдельной группой учащихся; при многочисленности класса можно при выходе в поле решать одновременно две задачи с последующим их разбором и обработкой в классе. При таком распределении учащихся каждый из них занят определенным делом и приняты необходимые меры, обеспечивающие должную трудовую дисциплину, нарушение которой в большинстве случаев вызывается тем, что отдельные учащиеся остаются без дела.

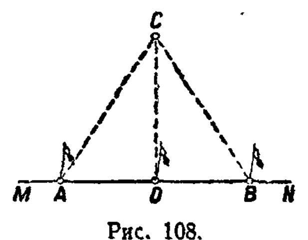


Рис. 108.

4) Провесить с помощью мерной ленты или простой веревки перпендикуляр к данной прямой в данной на ней точке, не пользуясь эккером.

Пусть O — точка на данной прямой (рис. 108); откладывая $OB = OA$, прикрепляют к колышкам A и B концы веревки и, взяв веревку за середину C, натягивают ее; тогда провешенная прямая CO и будет искомым перпендикуляром.

Эта задача служит иллюстрацией свойств равнобедренного треугольника.

5) Разделить данный угол пополам.

Отложив на сторонах угла от вершины равные отрезки, соединяют концы их прямой. Середина последнего отрезка соединяется с вершиной угла, получается искомая биссектриса. Это тоже иллюстрация свойств равнобедренного треугольника.

6) Определить расстояние между двумя пунктами A и B, один из которых, например A, недоступен.

Провешивают базис BM (рис. 109) и на нем — две прямые: $CB = CD$; затем в точке D строят $\angle CDE = \angle ABC$; если точка E является точкой пересечения DE и AC, то $DE = AB$, так как $\triangle ABC = \triangle CDE$ (УСУ). Если нет угломерного прибора, описанного выше, можно воспользоваться простым эккером, имеющимся в любом математическом кабинете, и построить базу BM так, чтобы $\angle ABM = d$. Прямым углом следует воспользоваться и в том случае, если нужно измерить ширину реки. Эта задача может служить иллюстрацией к первому признаку равенства треугольников (УСУ) и вытекающему из него следствию о равенстве прямоугольных треугольников.

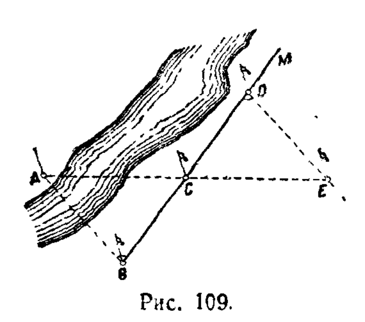


Рис. 109.

7) Найти расстояние между двумя пунктами A и B, доступными наблюдателю, если между ними имеется препятствие, мешающее видеть один пункт из другого.

Из произвольного пункта C (рис. 110), расстояние до которого от A и B можно измерить, провешивают прямые CA и CB и продолжают эти прямые за C на расстояние $CB_1 = CB$ и $CA_1 = CA$. Тогда $A_1B_1 = AB$, так как $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$ (СУС).

Эта задача может служить иллюстрацией ко второму признаку равенства треугольников (СУС).

Рис. 110.

8) На листе бумаги начерчена только часть треугольника ABC (рис. 111): его вершина C находится вне пределов чертежа. Требуется провести высоту h_c треугольника.

Решение. Строят по другую сторону от AB углы, соответственно равные углам при основании треугольника. Тогда $\triangle ABC_1 = \triangle ABC$ (УСУ); кроме того треугольник ABC_1 симметрично расположен относительно AB. Проведя $C_1D \perp AB$, имеем: $DC \perp AB$; кроме того DC проходит через вершину C, и, следовательно, DC — высота треугольника.

При решении задачи может возникнуть вопрос, как выполнить построение, если точку C_1 нельзя получить на рисунке и она окажется вне его. Тогда проводят $A_1B_1 \parallel AB$ (рис. 112) и рассматривают треугольник $A_1B_1C_1$, вершина которого уже не лежит вне пределов чертежа, и затем находят по предыдущему вершину C.

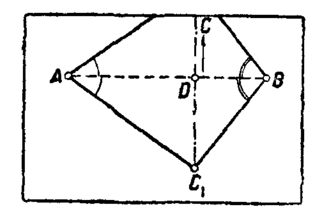


Рис. 111.

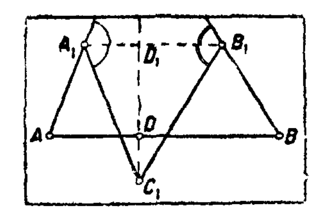


Рис. 112.

При проработке последней задачи мы наталкиваемся на препятствие, преодолеть которое возможно, если использовать параллельные прямые. Если учащиеся еще незнакомы с последними, то задача эта решается в разделе о параллельных прямых.

После того как пройден раздел о треугольниках, следует повторить с учащимися все пройденное о треугольниках и по мере повторения составить вместе с ними таблицу, в которой заключалась бы сводка всего изученного о треугольниках. Примерная таблица классификации треугольников приведена на стр. 87.

1) В первой горизонтальной строке таблицы помещены все виды разносторонних треугольников: остроугольные, прямоугольные и тупоугольные; во второй — равнобедренные, они также трех видов по отношению к углам; третья горизонтальная строка показывает, что равносторонние треугольники могут быть только остроугольными; две графы остаются пустыми; для них нет соответствующих образов в геометрии на плоскости.

Треугольники	Остроугольные	Прямоугольные	Тупоугольные
Разносторонние			
Равнобедренные			
Равносторонние		—	—

2) Рассматривая таблицу по вертикалям, учащиеся увидят, что остроугольные треугольники могут быть всех трех видов по отношению к сторонам, прямоугольные же и тупоугольные только двух: разносторонние и равнобедренные.

3) В треугольниках остроугольных высоты пересекаются внутри контура, в прямоугольных — в одной из вершин, а в тупоугольных — вне контура треугольников.

4) Таблица показывает, что в треугольниках все три угла могут быть острыми, но прямым или тупым может быть только один угол.

5) Треугольники второй и третьей горизонтальной строки имеют одну ось симметрии, равносторонние же треугольники — три оси симметрии.

6) Треугольники по первой вертикали имеют 3 внешних угла тупых, по второй вертикали — 2 внешних тупых и один прямой, по третьей вертикали — 2 тупых внешних угла и один острый; таким образом, только один из внешних углов треугольника может быть острым или прямым, остальные два обязательно тупые.

7) Два равных внешних угла имеют только треугольники второй и третьей горизонтальных строк, три равных внешних угла имеют равносторонний треугольник.

8) По две равные высоты имеют треугольники второй и третьей строк, равносторонний треугольник же имеет три равные: высоты, медианы и биссектрисы.

9) В треугольниках второй и третьей строки одна из высот есть в то же время и медиана, и высота, и биссектриса, а в треугольнике третьей строки все высоты, медианы и биссектрисы совпадают.

10) Только в треугольниках второй колонки один из внешних углов равен внутреннему смежному с ним, в остальных треугольниках внешние углы не равны углам, им смежным.

Имея такую таблицу, можно поставить учащимся целый ряд вопросов и предложить указать, треугольники какой строки или колонки обладают тем или иным свойством. Впоследствии, когда учащиеся ознакомятся с теоремой о сумме углов треугольников с описанными и вписанными окружностями, площадями треугольников, их подобием и т. д., можно еще не раз вернуться к этой таблице с тем, чтобы выводы были доказаны.

Указание. Прежде чем приступить к проработке контрольных вопросов, имеющих целью проверку усвоения учащимися раздела „Треугольник“, следует указать им, какими способами на основании имеющихся у них знаний они могут решать вопрос о равенстве двух отрезков или двух углов.

I. Два отрезка равны, если:

1) они являются боковыми сторонами равнобедренного треугольника;
2) они являются соответственными сторонами двух равных треугольников;
3) установлено, что точка, лежащая на стороне треугольника, образована пересечением с соответствующей медианой;
4) они являются наклонными, проведенными из одной внешней точки к данной прямой, при условии равенства их проекций, и наоборот.

II. Два угла равны, если:

1) они являются углами при основании равнобедренного треугольника;
2) установлено, что прямая, проходящая через вершину угла, есть его биссектриса;
3) они лежат в равных треугольниках против соответственно равных сторон;
4) установлено, что они прямые или противоположные.

III. Два треугольника равны, если они удовлетворяют признакам равенства треугольников (косоугольных, равнобедренных, равносторонних и прямоугольных).

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Какое наибольшее число прямых можно провести через 5 точек на плоскости?

2. В каком треугольнике высоты пересекаются в вершине треугольника?

3. Почему стороны треугольника не могут относиться, как 1:2:3?

4. В треугольнике h_a и m_a совпадают. Какой это треугольник?

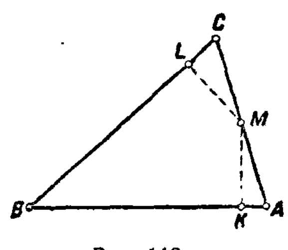


Рис 113.

5. Две стороны равнобедренного треугольника равны 20 *см* и 5 *дм*. Чему равна третья сторона?

6. В треугольнике ABC дано: $AB = 10$ *см*, $\angle A = 50°$ и $\angle B = 60°$. В треугольнике $A_1B_1C_1$ дано: $A_1B_1 = 10$ *см*, $\angle A_1 = 50°$ и $\angle C_1 = 60°$. Конгруэнтны ли эти треугольники?

7. В равнобедренном треугольнике ABC ($BA = BC$) точка M — середина стороны AC и $MK \perp AB$ и $ML \perp BC$. Доказать, что $\triangle MKA = \triangle MLC$ (рис. 113).

8. В каком треугольнике две высоты равны между собою?

9. В каком треугольнике все высоты равны между собою?

10. Назвать необходимый признак равенства двух треугольников, принимая во внимание только основные элементы.

11. С помощью циркуля и линейки построить угол в 45°, 22°,5, 11°,25.

12. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 *м* и 4 *м*. Найти проекцию гипотенузы на каждый из катетов.

13. Основание равнобедренного треугольника $a = 60$ *см*. Найти проекцию боковой стороны на основание.

14. Сторона равностороннего треугольника равна 10 *см*. Найти проекцию каждой его стороны на другие стороны.

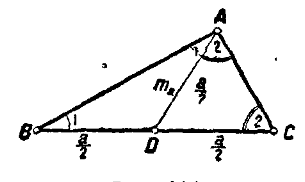


Рис. 114.

15. Верно ли утверждение, что высота треугольника меньше его стороны?

16. Пересечь прямой все три стороны треугольника.

17. Периметр равнобедренного треугольника равен 12 *дм*, одна из сторон его равна 3 *дм*. Определить остальные стороны.

18. Если в треугольнике медиана m_a равна $\frac{a}{2}$, то один угол его равен сумме двух других. Доказать (рис. 114).

Указания к контрольным вопросам.

1. $\frac{5\cdot(5-1)}{2}=10$; максимальное число прямых получаем в том случае, если никакие три из данных пяти точек не лежат на одной прямой.

2. В прямоугольном треугольнике, ибо катеты являются в то же время и высотами.

3. Одна сторона не может равняться сумме двух других.

4. В треугольнике равнобедренном, основание которого равно a, и в равностороннем, любая высота которого совпадает с медианой.

5. Третья сторона треугольника должна равняться 5 *дм*. Это — боковая сторона. Каждая из боковых сторон не может равняться 20 *см*, так как в этом случае $50 > 20+20$, что невозможно.

6. Треугольники не конгруэнтны, так как при наложении они не совпадают.

7. Треугольники равны по гипотенузе ($MA=CM$) и острому углу ($\angle A=\angle C$).

8. В равнобедренном (боковые высоты), в равностороннем (все три высоты равны).

9. В равностороннем треугольнике.

10. Для равенства треугольников необходимо, чтобы по крайней мере одна сторона треугольника была равна стороне другого.

11. Начертить прямой угол и разделить его на 2, 4, 8 равных частей.

12. Проекция гипотенузы на один из катетов равна другому катету, а потому проекции равны 3 *м* и 4 *м*.

13. Проекция боковой стороны равна половине основания и, следовательно, равна 30 *см*.

14. Проекция каждой стороны равна 5 *см* (см. № 13).

15. Высота h_a меньше сторон b и c, но может быть не меньше стороны a. В прямоугольном треугольнике высота может и равняться стороне, ибо она служит катетом.

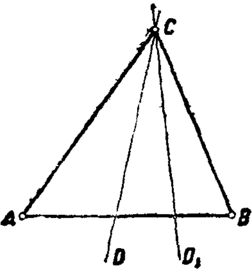


Рис. 115.

16. Любая прямая CD, $C_1D_1, \ldots$, проходящая через вершину треугольника и пересекающая противолежащую сторону, пересекает все три стороны (рис. 115).

17 Сторона $a=3$ *дм* боковой стороной служить не может, так как тогда основание равно $12-3-3=6$ *дм* и $6=3+3$, что для треугольника невозможно. Если $a=3$ *дм* — основание, то боковые стороны равны каждая $\frac{12-3}{2}=4{,}5$ *дм*, что возможно, так как $4\frac{1}{2} < 4\frac{1}{2}+3$.

18. Доказывается на основании свойств равнобедренного треугольника.

§ 11. Параллельные прямые. Задачи, связанные с параллельными прямыми.

Параллельные прямые.

1. К понятию о параллельных прямых следует подвести учащихся следующим образом. Учащимся предлагается провести произвольную прямую AB, отметить на ней две близлежащие точки M и N (рис. 116) и провести через эти точки к прямой AB перпендикуляры MM_1 и NN_1. Ставится вопрос, пересекутся ли эти перпендикуляры, если их продолжать в ту или другую сторону от прямой AB.

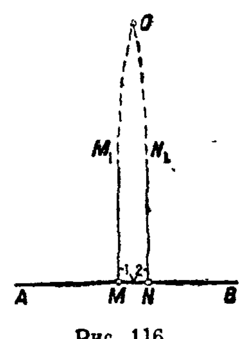


Рис. 116.

Если на заданный вопрос последует ответ, что прямые не пересекутся, а это учащиеся чувствуют интуитивно, или, наоборот, будет дан ответ, что прямые пересекутся, необходимо указать учащимся, что каждое из сделанных ими утверждений должно быть доказано, т. е. обосновано ссылкой на известные им аксиомы и теоремы.

Итак, имеем: $M_1M \perp AB$ и $N_1N \perp AB$; докажем, что перпендикуляры M_1M и N_1N, проведенные к одной и той же прямой AB, не могут пересечься. Допустим противоположное, а именно — что перпендикуляры M_1M и N_1N пересекутся в некоторой точке O, тогда получается треугольник MON, в котором сумма двух внутренних углов, $\angle 1$ и $\angle 2$, равна двум прямым: $\angle 1 + \angle 2 = 2d$, что невозможно, так как согласно доказанной ранее теореме сумма двух углов треугольника всегда меньше $2d$. Отсюда следует, что принятое допущение, что перпендикуляры MM_1 и NN_1 при своем продолжении пересекутся в некоторой точке O, неверно. Итак, два перпендикуляра к одной и той же прямой не пересекаются, сколько бы их ни продолжать.

После такого разбора учащимся указывается, что на плоскости можно расположить две прямые так, что они при своем продолжении никогда не пересекутся, и дается определение: *прямые, которые расположены в одной плоскости и не пересекаются, называются параллельными.*

Возвращаясь затем к полученному выше выводу о взаимном положении двух перпендикуляров к одной и той же прямой, преподаватель отмечает, что этот вывод можно формулировать в виде теоремы:

две прямые, перпендикулярные к третьей, параллельны.

Вводится знак для обозначения параллельности двух прямых $AB \parallel CD$.

Преподаватель должен подчеркнуть, что необходимым условием для параллельности двух прямых является то, что прямые должны лежать в одной плоскости. Это указание должно быть выявлено в определении, а потому определение параллельных прямых без слов „которые расположены в одной плоскости“ является неполным.

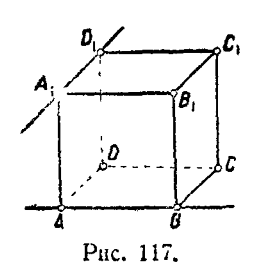


Рис. 117.

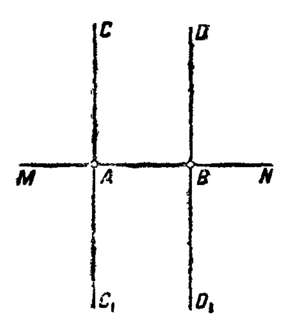


Рис. 118.

Следует использовать модель куба для показа параллельных и непараллельных прямых. Так, ребра куба AB и A_1D_1 (рис. 117) не пересекаются: они лежат в разных плоскостях; поясняется, что такие прямые, в отличие от прямых параллельных, называются с к р е щ и в а ю щ и м и с я. Ребра же куба AB и A_1B_1, AA_1 и BB_1, BB_1 и CC_1 также не пересекаются; однако они попарно расположены на одной плоскости, они п а р а л л е л ь н ы.

2. Теорема о двух перпендикулярах на плоскости к одной и той же прямой является одним из признаков параллельности прямых. Необходимо показать учащимся ее практическое приложение, для чего следует решить задачу:

На плоскости даны две точки, A и B; провести через эти точки две параллельные прямые.

П о с т р о е н и е. Через точки A и B проводится прямая MN (рис. 118), и в этих же точках строятся к прямой MN перпендикуляры AC и BD; $AC \parallel BD$. Продолжая оба перпендикуляра по другую сторону от прямой MN, имеем: $CC_1 \parallel DD_1$. Это — одно из решений, так как через точки A и B можно провести бесчисленное множество п а р параллельных прямых.

Действительно, проводим на плоскости ряд произвольных прямых и к ним через точки A и B перпендикуляры (рис. 119); получаем в каждой из точек A и B пучок прямых; при этом каждой прямой пучка с центром в точке A соответствует определенная прямая, ей параллельная, принадлежащая пучку с центром в точке B.

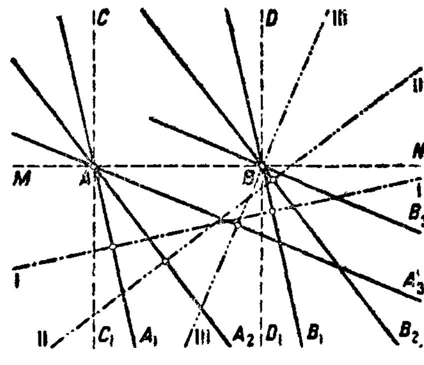


Рис. 119.

После этого следует решить задачу на построение:

через точку A вне данной прямой провести прямую, параллельную данной прямой.

Запись задачи:

Дана прямая MN и вне ее точка A.
Провести через точку A прямую, параллельную прямой MN.

Решение. Из данной точки A (рис. 120) проводят к прямой MN при помощи линейки и чертежного треугольника перпендикуляр AP, $AP \perp MN$; затем проводят через точку A к прямой AP перпендикуляр AK также при помощи линейки и чертежного треугольника, $AK \perp AP$. Прямая $AK \parallel MN$ на основании теоремы: две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны.

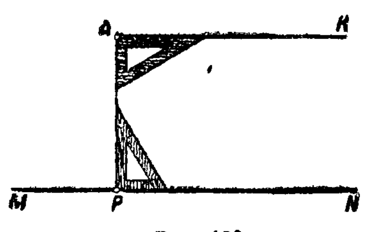


Рис. 120.

Краткая запись решения:

$$\frac{AP \perp MN \quad AK \perp AP}{AK \parallel MN}$$

Необходимо предложить учащимся сделать несколько построений, различно расположив прямую MN относительно края доски или листа бумаги, как это показано на рисунке 121.

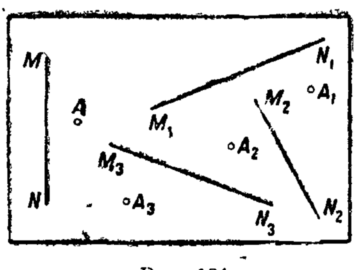


Рис. 121.

3. Когда построение выполнено, преподаватель должен указать, что следовало бы еще исследовать, нет ли помимо построенной прямой еще другой прямой, которая также проходит через точку A и параллельна данной прямой MN, и что если таковой нет, то проведенная прямая является единственной прямой, проходящей через точку A параллельно прямой MN.

Учащимся разъясняется, что доказать это положение нельзя при помощи известных нам аксиом и теорем и что вековой опыт человечества, приобретенный решением практических задач, привел еще древних геометров к заключению, что

через данную точку вне прямой на плоскости можно провести только одну прямую, параллельную данной прямой.

Последнее суждение есть аксиома о параллельных.

Не лишне указать учащимся, что, начиная с древнейших времен, лучшими математиками все же делались попытки доказать аксиому о параллельных, т. е. рассматривать ее как теорему, которая, как они предполагали, может быть доказана при помощи уже принятых аксиом; однако их попытки были и остались безуспешными. В настоящее время рассуждениями, выходящими за пределы элементарного курса геометрии, установлено, что аксиому о параллельных доказать нельзя, не внося дополнительных аксиом к числу тех, которые установлены Евклидом.

На аксиоме о параллельных и следствиях из нее следует заострить внимание учащихся.

Учащиеся должны уметь формулировать словами запись: на плоскости $AB \parallel CD$ и $CD \parallel MN$, уметь сделать к ней нужный чертеж и после соответствующего доказательства записать вывод, вытекающий из взаимного расположения прямых AB, CD и MN, а именно что $AB \parallel MN$.

К чтению такого рода записей и умению по записи сделать соответствующий вывод следует приучать учащихся.

Следует отметить, что большинство учебников обычно приводит аксиому о параллельных непосредственно перед рассмотрением обратной теоремы о параллельных, т. е. теоремы: **две параллельные прямые, пересеченные третьей, образуют равные внутренние накрест лежащие углы**, так как доказательство этой теоремы основано на аксиоме о параллельных; для прямой теоремы: **две прямые, пересеченные третьей, параллельны, если внутренние накрест лежащие углы равны** — нет необходимости в применении аксиомы о параллельных. Для доказательства прямой теоремы достаточно предшествующих аксиом. Нужно также отметить, что у Евклида аксиома о параллельных впервые используется в 29-м предложении 1-й его книги при доказательстве упомянутой выше обратной теоремы.

Приводя все же аксиому о параллельных ранее, а именно — в связи с анализом решения задачи о проведении прямой, параллельной данной прямой, полагаем, что при таком расположении материала учащимся более доступно понимание необходимости аксиомы о параллельных.

Углы при параллельных.

4. Ознакомление учащихся с углами, образуемыми двумя прямыми и секущей, целесообразно начать с повторения свойств углов, образуемых двумя пересекающимися прямыми, рассмотреть получаемые противоположные и смежные углы и лишь затем перейти к рассмотрению углов, образуемых тремя попарно пересекающимися прямыми, из которых одна по отношению к двум другим, параллельным, называется секущей.

Рис. 122.

Получаемым при этом восьми углам (рис. 122) даются названия. Нужно указать, что не следует требовать от учащихся запоминания всех наименований углов, образуемых двумя параллельными прямыми и секущей; достаточно, если учащиеся умеют четко разбираться в расположении соответственных и внутренних накрест лежащих углов. Доказывается, что определенная зависимость между углами какой-либо одной из следующих двенадцати пар углов — $\angle 3$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 6$, $\angle 1$ и $\angle 7$,

$\angle 2$ и $\angle 8$, $\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 7$, $\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 1$ и $\angle 8$, $\angle 3$ и $\angle 6$, $\angle 2$ и $\angle 7$ влечет за собою определенную зависимость между углами каждой из остальных пар. Так, если первая пара углов равна, то равны и следующие семь пар углов, а последние четыре пары углов пополнительные, и т. д.

Небесполезно обратить внимание учащихся на следующее: углы, образуемые при пересечении двух параллельных третьей прямой, секущей, — в общем случае углы острые и тупые, при этом все острые углы между собою и все тупые углы между собою равны, а любая пара углов, из которых один острый, а другой тупой, — углы пополнительные; если же хотя бы один из восьми углов — прямой, то все углы равны и все углы попарно пополнительны.

Признаки параллельности прямых.

5. В ряде учебников теорема о признаках параллельности двух прямых, пересеченных третьей, доказывается способом от противного.

Это доказательство — следующее: допустим, что прямые AB и CD не параллельны (рис. 123); тогда они могут пересечься или в какой-нибудь точке O, лежащей справа от секущей EF, или в какой-нибудь точке O_1, лежащей слева от секущей EF. Если AB и CD пересекутся в точке O, то в полученном треугольнике $OMN \angle 1 > \angle 2$; однако это противоречит условию, согласно которому $\angle 1 = \angle 2$, а потому допущение, что прямые AB и CD пересекутся в точке O, неверно. Итак, прямые AB и CD не могут пересечься, следовательно они параллельны: $AB \parallel CD$; к тому же заключению приводит допущение, что прямые AB и CD пересекутся в некоторой точке O_1, слева от секущей EF.

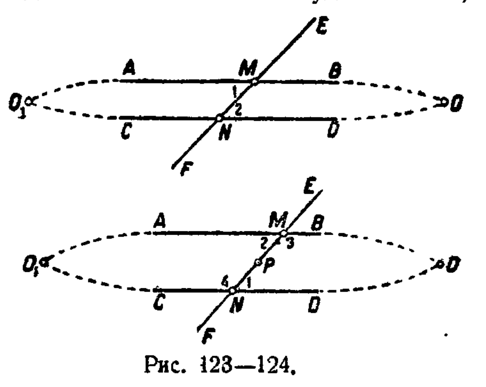


Рис. 123—124.

Иногда при доказательстве указанной теоремы пользуются доказательством, основанным на том, что прямые AB и CD и секущая EF представляют собою центрально-симметричную фигуру относительно точки P (рис. 124) — середины отрезка MN. Допустим, что прямые AB и CD пересекаются справа от секущей EF в какой-нибудь точке O; если повернуть часть фигуры, а именно $OBMND$, в плоскости чертежа вокруг точки P на 180°, то MB пойдет по NC и ND пойдет по MA, так как по условию $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как углы, дополняющие равные углы до $2d$. Но, согласно принятому допущению, прямые AB и CD имеют справа от секущей EF общую точку O, а потому после поворота фигуры в плоскости чертежа на 180° и слева от секущей EF должна быть точка O_1, которая также является точкой пересечения прямых AB и CD. Итак, прямые AB и CD имеют д в е точки пересечения; но это невозможно, а потому сделанное допущение, что AB и CD пересекаются в некоторой точке O, если $\angle 1 = \angle 2$, невозможно; если же AB и CD не пересекаются, то они параллельны.

Прямое доказательство данной теоремы, приведенное в стабильном

учебнике, следует предпочесть доказательствам от противного, изложенным выше, так как метод доказательства от противного всегда представляет для учащихся затруднения, обусловливаемые тем, что приходится принимать в качестве исходного условия для цепи заключений противоположное тому, что требуется доказать.

6. После проработки теоремы о признаках параллельности двух прямых следует вернуться к задаче на построение прямой, проходящей через данную точку A параллельно данной прямой MN.

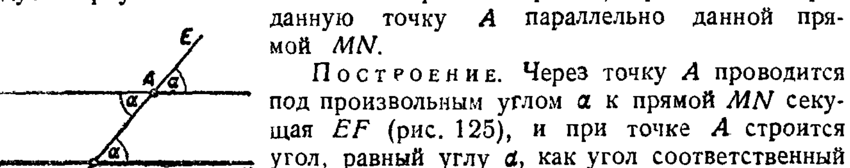


Рис. 125.

Построение. Через точку A проводится под произвольным углом α к прямой MN секущая EF (рис. 125), и при точке A строится угол, равный углу α, как угол соответственный или внутренний накрест лежащий так, чтобы одна сторона угла совпала с секущей EF. Следует указать, что построение, ранее приведенное и сводящееся к построению двух перпендикуляров к третьей прямой, аналогично последнему построению.

Учащимся должны быть даны практические указания о проведении параллельных прямых при помощи линейки и чертежного треугольника. Указывается, что при параллельном перемещении чертежного треугольника вдоль ребра линейки прямые, проводимые вдоль одного из катетов или гипотенузы чертежного треугольника (рис. 126), образуют вместе с ребром линейки равные соответственные углы, в силу чего проводимые прямые параллельны.

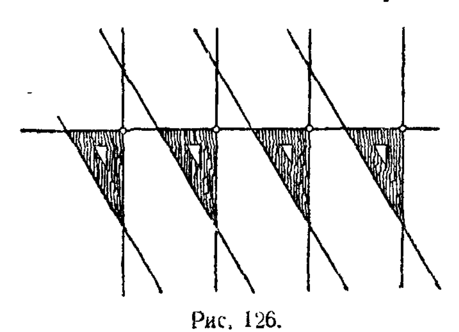


Рис. 126.

Показывается, если это возможно, черчение параллельных прямых при помощи рейсшины (рис. 126а).

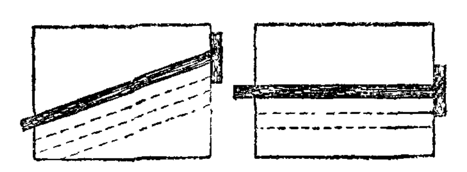


Рис. 126а.

Когда учащимися проведены при помощи рейсшины прямые, следует предложить им объяснить, почему проведенные прямые параллельны. Понятно, что параллельность проводимых прямых обусловливается тем, что при перемещении рейсшины вдоль ребра доски все время остается неизменным угол между короткой и длинной линейками рейсшины, другими словами, равны соответственные углы, образуемые проведенными прямыми и краем доски.

7. Теорема: **две параллельные прямые, пересеченные третьей, образуют равные внутренние накрест лежащие углы** — является теоремой, обратной теореме о признаках параллельности двух прямых. В стабильном учебнике она доказывается методом от противного, и как следствие из нее приведено суждение: **прямая, перпендикулярная к одной из двух параллельных прямых, перпендикулярна и к другой.**

Можно привести и прямое доказательство указанной теоремы, но тогда необходимо сперва доказать, как следствие из аксиомы о параллельных, что **прямая, перпендикулярная к одной из двух параллельных прямых, перпендикулярна и к другой.**

Приводим доказательство.

Дано: $AB \parallel CD$, $EF \perp AB$
Треб. док.: $EF \perp CD$.

Доказательство. Прямая EF перпендикулярна к прямой AB и пересекает прямую CD в точке N (рис. 127). Если допустить, что EF не перпендикулярна к CD, или, что то же самое, CD не перпендикулярна к EF, то через точку N можно провести прямую C_1D_1, перпендикулярную к прямой EF, и тогда $C_1D_1 \parallel AB$, так как в данном случае AB и C_1D_1 — две прямые, перпендикулярные к одной и той же третьей прямой EF. Однако согласно условию и прямая CD параллельна AB; таким образом, через точку N проходят две различные прямые, CD и C_1D_1, параллельные AB, что противоречит аксиоме о параллельных; отсюда следует, что допущение, что прямая CD не перпендикулярна к прямой EF, невозможно; итак, $CD \perp EF$ или $EF \perp CD$.

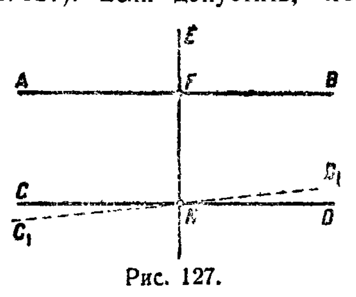


Рис. 127.

Приводим доказательство теоремы:

две параллельные прямые, пересеченные третьей, образуют равные накрест лежащие углы.

Дано: $AB \parallel CD$, прямая EF — секущая.
Треб. док.: $\angle 1 = \angle 2$.

Доказательство. Делим отрезок MN в точке O пополам (рис. 128), проводим затем через точку O перпендикуляр OK к прямой CD и продолжаем его до пересечения с прямой AB в точке L; на основании доказанного выше следствия из аксиомы о параллельных $KL \perp AB$. и полученные треугольники OKN и OLM — прямоугольные треугольники; эти треугольники равны, так как $ON = OM$ и $\angle 3 = \angle 4$ как углы противоположные; из равенства треугольников следует, что $\angle 1 = \angle 2$. Итак, если $AB \parallel CD$ и EF — секущая, то внутренние накрест лежащие углы равны.

Рис. 128.

8. После проработки теоремы, обратной теореме о признаках параллельности двух прямых, можно вместе с учащимися составить в виде таблицы сводку признаков параллельности прямых (см. стр. 96).

Итак, имеется шесть признаков, определяющих параллельность двух прямых, причем первый из них — частный случай второго. Необходимо помнить, что наличие одного из признаков обусловливает все остальные.

ТАБЛИЦА.

ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ДВУХ ПРЯМЫХ.

$AB \parallel CD$, если: 1) $AB \perp MN$ и $CD \perp MN$.
2) $\angle 1 = \angle 5$ как углы соответственные.
3) $\angle 3 = \angle 5$ как углы внутренние накрест лежащие (или $\angle 4 = \angle 6$).
4) $\angle 1 = \angle 7$ как углы внешние накрест лежащие (или $\angle 2 = \angle 8$).
5) $\angle 4 + \angle 5 = 2d$ как углы внутренние односторонние (или $\angle 3 + \angle 6 = 2d$).
6) $\angle 1 + \angle 8 = 2d$ как углы внешние односторонние (или $\angle 2 + \angle 7 = 2d$)

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Какие прямые называются параллельными?

2. При каком положении секущей равны все углы, образуемые двумя параллельными прямыми и этой секущей?

3. Прямая, проведенная в треугольнике параллельно основанию, отсекает от него малый треугольник. Доказать, что отсекаемый треугольник и данный равноугольны.

4. Вычислить все углы, образуемые двумя параллельными и секущей, если известно, что один из углов $\alpha = 72°30'$.

5. Внутренние односторонние углы соответственно равны 54° и 123°. На сколько градусов надо повернуть одну из прямых около точки ее пересечения с секущей, чтобы прямые были параллельны?

6. Доказать, что биссектрисы а) двух равных, но не противоположных углов, образуемых двумя параллельными прямыми и секущей, параллельны, б) двух неравных углов при тех же прямых и секущей — перпендикулярны.

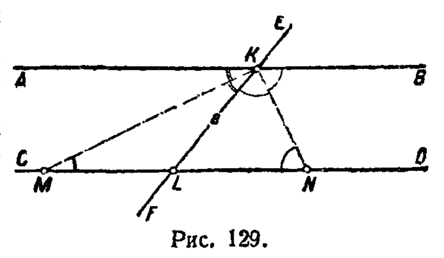


Рис. 129.

7. Даны две параллельные прямые AB и CD и секущая EF (рис. 129), пересекающая данные прямые в точках K и L. Проведенные биссектрисы KM и KN углов AKL и BKL отсекают на прямой CD отрезок MN. Найти длину MN, если известно, что отрезок KL секущей, заключенный между параллельными, равен a.

Решение. Треугольники KLM и KLN — равнобедренные, а $ML = KL = a$ и $LN = KL = a$; следовательно, $MN = 2a$.

Эта задача дает указание, как можно использовать отрезок секущей, заключенный между параллельными прямыми, для проведения биссектрисы любого угла, образуемого двумя параллельными и секущей. В самом деле, если $AB \parallel CD$ и KL — отрезок секущей, то, отложив по обе стороны от точки L на прямой CD отрезки $LM = LN = LK$ и, соединив M и N с точкой K, имеем KM и KN — биссектрисы углов при точке K.

Признаки непараллельности прямых.

9. Для прямой теоремы, выражающей признаки параллельности двух прямых, и ей обратной также верны и противоположные теоремы:

1. Если при пересечении двух прямых третьей 1) внутренние накрест лежащие углы не равны, 2) *внешние накрест лежащие углы не равны*, 3) соответственные углы не равны, 4) внутренние односторонние углы не пополнительны, т. е. сумма их больше или меньше $2d$, и 5) внешние односторонние *углы не пополнительны*, то прямые не параллельны.

2. Если две прямые не параллельны, то при пересечении их третьей прямой 1) внутренние накрест лежащие углы не равны, 2) внешние накрест лежащие углы не равны, 3) соответственные углы не равны, 4) внутренние односторонние углы не составляют в сумме $2d$ и 5) внешние односторонние углы не составляют в сумме $2d$.

Рис. 130.

Теоремы эти доказываются методом от противного; теоремы (1) выражают признаки непараллельности двух прямых.

Приводим доказательство одного из признаков непараллельности: **если при пересечении двух прямых третьей сумма внутренних односторонних углов не равна $2d$, то прямые не параллельны** и они, следовательно, пересекаются.

Дано: $\angle \alpha + \angle \beta < 2d$ (рис. 130).

Треб. док.: $AB \nparallel CD$, т. е. AB и CD пересекаются.

Доказательство. Допустим, что $AB \parallel CD$, тогда $\angle \alpha + \angle \beta = 2d$; но это противоречит условию, а потому принятое допущение неверно; если же прямая AB не параллельна прямой CD, то прямые пересекаются.

Так же доказывается теорема для случая, когда $\angle \alpha_1 + \angle \beta_1 > 2d$.

Рассмотренное доказательство одного из признаков непараллельности прямых, а также доказательства остальных признаков могут служить темами для самостоятельной работы учащихся.

Приведенный признак непараллельности прямых, дополненный утверждением, что прямые пересекутся по ту сторону секущей, на которой сумма внутренних односторонних углов меньше $2d$, был принят Евкли-

дом как аксиома параллельных прямых и известен как V постулат Евклида.

У Евклида аксиома гласит: **если две прямые линии встречаются с третьей так, что сумма внутренних углов, лежащих по одну сторону третьей, меньше двух прямых углов, то две первые прямые при достаточном своем продолжении встретятся по ту сторону третьей прямой, на которой сумма внутренних углов меньше двух прямых.**

В современных элементарных курсах геометрии V постулат Евклида заменяется равносильной ему аксиомой о параллельных, данной еще Проклом (412—485), одним из комментаторов Евклида.

Следует остановиться на одном из признаков непараллельности прямых, который используется при доказательстве теоремы: через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность и притом только одну.

Теорема (признак непараллельности): **перпендикуляры к двум пересекающимся прямым пересекаются.**

Дано: прямые AB и CD пересекаются; $MN \perp AB$ и $KL \perp CD$ (рис. 131).
Треб. док.: MN и KL пересекаются.

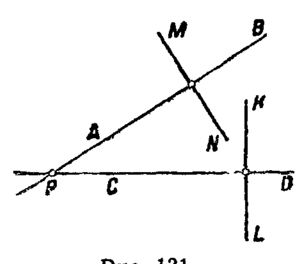


Рис. 131.

Действительно, если допустить, что MN и KL не пересекаются, то $MN \parallel KL$; но в таком случае прямая AB, перпендикулярная к MN, будет перпендикулярна и к KL, так как $MN \parallel KL$. Итак, и CD и AB перпендикулярны к KL, но CD и AB пересекаются в некоторой точке P, следовательно из точки P проведены к KL два перпендикуляра, AB и CD, что невозможно, а потому допущение, что $MN \parallel KL$, неверно; если же MN не параллельна KL, то MN и KL пересекаются.

Последняя теорема представляет для учащихся 6-го класса значительные трудности; поэтому целесообразно рассмотреть ее в 7-м классе для обоснования вывода теоремы о проведении окружности через три точки, не лежащие на одной прямой.

Углы с параллельными сторонами.

10. Теорему о свойстве углов с соответственно параллельными сторонами следует рассмотреть для случаев, когда данные углы или оба острые или оба тупые, или один из них острый, а другой тупой.

Теорема находит широкое применение при изучении свойств различных фигур и, в частности, четырехугольника.

Встречающееся иногда при формулировке теорем указание на то, что стороны углов с соответственно параллельными сторонами могут иметь или одинаковое или противоположное направление, считаем ненужным.

Если пользоваться термином „направление", то следовало бы разъяснить, что должно понимать под этим словом. Достаточно обратить внимание учащихся на то, что углы с соответственно параллельными сторонами равны, если они оба острые или тупые, если же один из углов тупой, а другой острый, то они в сумме составляют $2d$.

Углы с перпендикулярными сторонами.

11. Теорема об углах с соответственно перпендикулярными сторонами может быть дана непосредственно после теоремы о свойстве углов с соответственно параллельными сторонами.

В таком случае доказательство ее проводится следующим образом:

Дано: $\angle B$ — острый; $MN \perp AB$ и $KL \perp BC$ (рис. 132).
Треб. док.: $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 1 + \angle 3 = 2d$.

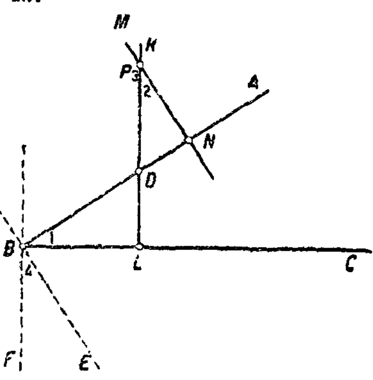


Рис. 132.

Доказательство. Проводим через вершину угла B вспомогательные прямые так, что $BE \perp BA$ и $BF \perp BC$, и тогда $\angle 4 = \angle 1$, так как $\angle CBE$ дополняет оба угла до прямого. Но $\angle 4 = \angle 2$, а потому $\angle 1 = \angle 2$. Рассматривая затем $\angle 1$ и $\angle 3$ и зная, что 1) $\angle 2 + \angle 3 = 2d$ и 2) $\angle 1 = \angle 2$, находим, что $\angle 1 + \angle 3 = 2d$.

Считаем нужным указать, что данную теорему все же целесообразнее рассмотреть после ознакомления учащихся с теоремой о сумме углов треугольника, ибо доказательство теоремы в таком случае значительно упрощается. Действительно, в прямоугольных треугольниках BDL и DPN углы при вершине D равны, как углы противоположные, а отсюда непосредственно следует, что $\angle 1 = \angle 2$, а также, что $\angle 1 + \angle 3 = 2d$.

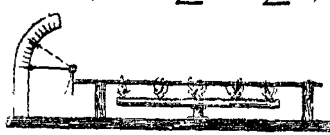


Рис. 133.

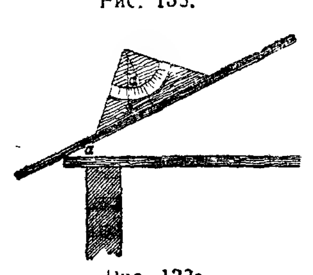


Рис. 133а.

Учащимся приводятся примеры использования с ойств углов с соответственно параллельными и перпендикулярными сторонами в приборах и деталях машин (рис. 133 и 133а).

Приведенные два доказательства одной и той же теоремы об углах с соответственно перпендикулярными сторонами указывают, что то или иное доказательство теоремы зависит от того, в каком месте курса приводится теорема. Поэтому необходимо, чтобы учащиеся знали порядок следования основных теорем. Так, в стабильном учебнике теорема о свойствах равнобедренного треугольника предшествует признакам равенства треугольников и доказывается методом симметрии, если же рассмотреть указанную теорему в связи с признаками равенства треугольников, то доказательство ее основано на втором признаке равенства треугольников (СУС).

Сумма углов треугольника.

12. При выводе теоремы о сумме углов треугольника можно использовать наглядные пособия. Вырезывают треугольник ABC (рис. 134), пронумеровывают его углы, затем обрывают их и прикладывают друг к другу, как показано на рисунке 135; получается: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 2d$. Проводят из вершины C треугольника

ABC высоту *CD* и перегибают треугольник так, чтобы высота делилась пополам, т. е. вершина *C* упала в точку *D* — основание высоты (рис. 136). Линия перегиба *MN* есть средняя линия треугольника *ABC*; затем перегибают равнобедренные треугольники *AMD* и *DNB* по их высотам, при этом вершины *A* и *B* совпадут с точкой *D* и

$$\angle 1+\angle 2+\angle 3=2d.$$

Рис. 134.

Следует помнить, что использованием наглядных пособий в систематическом курсе геометрии отнюдь не ставится задача подменить л о г и ч е с к о е доказательство какого-либо предложения опытной проверкой его.

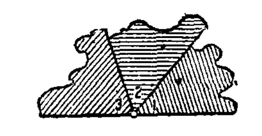


Рис. 135.

Наглядные пособия должны лишь содействовать пониманию учащимися того или иного геометрического факта, свойств той или иной геометрической фигуры и взаимного расположения отдельных ее элементов.

При определении величины внешнего угла треугольника следует напомнить учащимся о рассмотренной ранее теореме о внешнем угле треугольника и указать, что теорема о сумме углов треугольника позволяет и построением и вычислением установить числовую зависимость между углами внешними и внутренними, не смежными с ними.

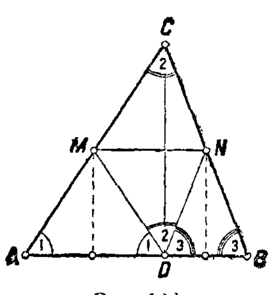


Рис. 136.

Как следствие из теоремы о сумме углов треугольника доказывается, что в прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

Одно из доказательств следующее: на гипотенузе *BA* треугольника *ABC* (рис. 137) откладываем от вершины *B* отрезок *BD*$=$*BC* и соединяем точку *D* с точкой *C*; получаем равносторонний треугольник *BDC*, так как каждый из его углов равен 60°. Итак, $BC=BD=DC$ (1). Рассматривая затем треугольник *ADC*, убеждаемся, что он равнобедренный, и $DC=DA$ (2). Сопоставляя равенства (1) и (2), имеем: $BC=BD=DC=AD$; но, если $DA=DB$, то *AB* делится точкою *D* пополам и $DA=\frac{AB}{2}$, а потому и $BC=\frac{AB}{2}$, так как $DC=DA$.

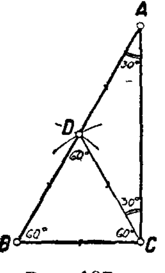


Рис. 137.

Углы многоугольника.

13. После вывода теоремы о сумме углов треугольника и следствий, вытекающих из этой теоремы, можно остановиться на определении суммы внутренних и внешних углов как четырехугольника, так и вообще многоугольника.

При выводе формулы для вычисления внутренних углов многоугольника последний разбивают на треугольники, или проводя все диагонали

из одной вершины многоугольника или соединив взятую где-либо внутри многоугольника произвольную точку со всеми вершинами многоугольника. Если дан многоугольник с n сторонами, то сумма внутренних углов n-угольника: $S_n = 2d\,(n-2)$. Указывается, что сумма внутренних углов многоугольника зависит от числа n сторон многоугольника. S_n есть функция числа сторон многоугольника: $S_n = f(n)$. Понятно, что последнее указание дается не для учащихся, еще не знакомых с понятием функции.

Следует обратить внимание учащихся на то, что сумма внешних углов любого многоугольника равна $4d$ и не зависит от числа его сторон, — она есть величина п о с т о я н н а я.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Каков вид треугольника, в котором: а) сумма двух любых углов больше d, б) сумма двух любых углов равна d, в) сумма двух любых углов меньше d?

2. Написать формулу для вычисления в равнобедренном треугольнике: а) угла при основании β, если дан угол α при вершине, б) угла α при вершине, если дан угол β при основании.

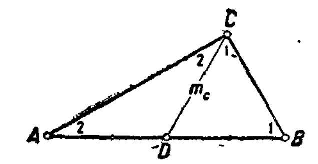


Рис. 138.

3. Во сколько раз сумма внешних углов треугольника больше суммы внутренних его углов?

4. Могут ли внешние углы треугольника быть все: а) острыми? б) тупыми? в) прямыми?

5. В каком треугольнике каждый внешний угол вдвое больше каждого из внутренних углов?

6. В треугольнике даны два угла, α и β. Найти построением третий угол γ и выразить формулой его зависимость от α и β.

7. Чему равна сумма внутренних и сумма внешних углов двадцатиугольника?

8. Почему сумма внутренних углов многоугольника не может равняться $11d$, $15d$, вообще — нечетному числу прямых углов?

9. Чему равен внешний угол восьмиугольника, все внутренние углы которого равны?

10. Сумма внутренних углов n угольника равна $10\,d$. Чему равно n?

11. Если медиана m_c треугольника (рис. 138) равна половине стороны c, то $\angle C = 90°$. Доказать.

12. Сумма углов пятиугольной звезды равна $2d$ (рис. 139). Доказать.

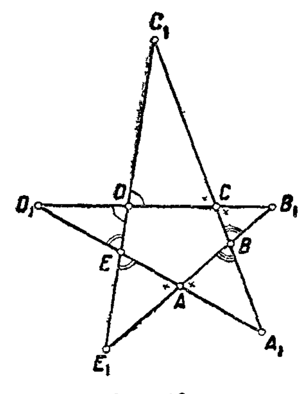


Рис. 139.

Указания к контрольным вопросам.

Вопросы 1—5 и 7—10 решаются устно в классе.

1. а) Если сумма двух любых углов треугольника больше d, то любой третий угол меньше d, т. е. острый следовательно, треугольник может быть только остроугольным; б) треугольник прямоугольный; в) тупоугольный.

2. $\beta = \dfrac{180° - \alpha}{2}$; $\alpha = 180° - 2\beta$. Следует решить один-два численных примера.

3. Сумма внешних углов треугольника в д в а р а з а больше суммы внутренних его углов, так как $4d : 2d = 2$.

4. а) Внешние углы треугольника не могут быть все острыми, так как при этом условии все внутренние должны б быть тупыми, что невозможно; б) они могут быть тупыми, ибо все внутренние углы при этом условии будут острыми; в) они не могут быть прямыми, ибо тогда сумма внешних углов равнялась бы $3d$, что невозможно.

На первый вопрос может быть дан и другой ответ, а именно: в треугольнике все внешние углы не могут быть острыми, так как при этом условии сумма всех внешних углов была бы меньше $3d$, что невозможно.

5. По условию внешний угол должен быть вдвое больше внутреннего угла, смежного с ним. Обозначив величину внутреннего угла через x, имеем: $x + 2x = 180°$, откуда $x = 60°$, а поэтому треугольник равноугольный и, следовательно, равносторонний.

6. Надо построить сперва два прилежащих угла α и β и затем продолжить одну из крайних сторон; третий прилежащий угол $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$ — искомый.

7. Сумма внешних углов равна $4d$; сумма внутренних углов равна $2d \cdot 20 - 4d = 36d$. Задача решается проще так: у каждой вершины многоугольника сумма внутреннего и внешнего углов равна $2d$, сумма же углов, внутренних и внешних, при всех вершинах равна $2d \cdot 20 = 40d$. Вычитая из $40d$ сумму внешних углов, которая постоянна и равна $4d$, получаем $36d$.

8. Сумма внутренних углов n угольника равна $2d(n-2)$. Эта формула содержит d четное число раз.

9. Если внутренние углы восьмиугольника равны между собою, то и все 8 внешних его углов равны между собою и каждый из них равен $360°:8 = 45°$.

10. Если к $10d$ — сумме внутренних углов n-угольника — прибавить $4d$ — сумму внешних его углов, то получим $14d$, учитывая, что при каждой вершине сумма внутреннего и внешнего углов равна $2d$, находим, что число сторон многоугольника $n = 14d:2d = 7$.

11. Треугольники BDC и ADC (рис. 138) равнобедренные, а потому их углы при основании равны. Сумма углов $\angle 1 + \angle 1 + \angle 2 + \angle 2 = 2d$, отсюда, $\angle 1 + \angle 2 = d$, т. е. $\angle BCA = d$.

12. При каждой вершине пятиугольника $ABCDE$ (рис. 139) имеются в данном случае по два равных между собою внешних угла, которые одновременно являются и внутренними углами пяти треугольников, и сумма всех их равна $4d.2 = 8d$, так как сумма внешних углов многоугольника равна $4d$. Но сумма всех внутренних углов пяти треугольников равна $2d \cdot 5 = 10d$, а потому $\angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 + \angle D_1 + \angle E_1 = 10d - 8d = 2d$.

Отрезки параллельных между параллельными.

14. Теорема об отрезках параллельных между параллельными существенно важна при изучении параллелограмов; кроме того вытекающее из нее следствие позволяет утверждать, что параллельные прямые отстоят друг от друга на одинаковом расстоянии.

Деление отрезка на равные части.

15. Теорема: **если на одной стороне угла отложить от его вершины равные отрезки и провести через их концы параллельные прямые до пересечения их с другой стороной угла, то на этой стороне получатся отрезки, равные между собою**, — позволяет решить задачу:

разделить данный отрезок на n равных частей, где n — любое целое число.

Следует показать учащимся, как для деления отрезка на равные части может быть использована линеванная бумага.

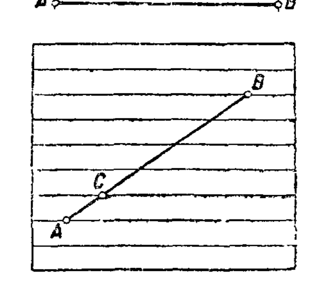


Рис. 140.

Пусть дан отрезок $AB = a$ (рис. 140); разделить его на 5 равных частей. Для выполнения деления с помощью линеванной бумаги раздвигают концы ножек циркуля на расстояние, равное отрезку AB, помещают одно острие циркуля на одну из линеек и отмечают точку B, другое острие циркуля помещают на пятую по счету линейку, после первой, и отме-

чают точку A; после этого соединяют прямою точки A и B; точки встречи отрезка AB с линейками и будут искомыми точками деления: $AC = \frac{1}{5} AB$.

С помощью линеванной бумаги разделить отрезок a на n частей можно только тогда, когда расстояние между линейками не больше $\frac{a}{n}$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Найти величину углов треугольника, если известно, что они относятся, как 3:4:5.

2. Два угла равнобедренного треугольника относятся, как 2:5. Найти углы треугольника.

3. В прямоугольном треугольнике с углом в 30° гипотенуза равна 11 *м.* Чему равна ее проекция на меньший катет?

4. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен 36°. Чему равен угол между боковыми высотами?

5. Даны разносторонние треугольники ABC и KLM (рис. 141); стороны одного из них соответственно перпендикулярны сторонам другого. Каким углам треугольника ABC соответственно равны углы K, L и M треугольника KLM?

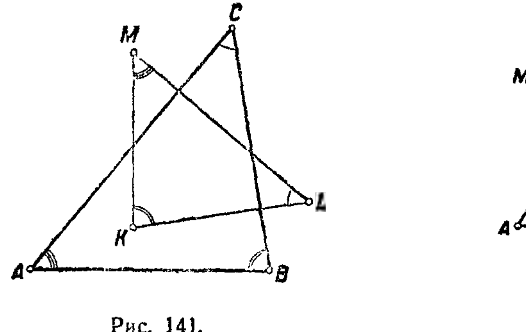


Рис. 141.

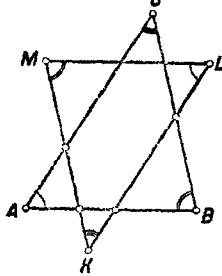


Рис. 142.

6. Дан треугольник ABC и треугольник KLM (рис. 142), стороны которого соответственно параллельны сторонам треугольника ABC. Каким углам треугольника ABC соответственно равны углы K, L и M треугольника KLM?

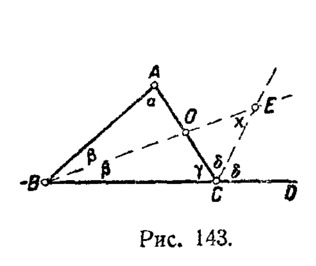


Рис. 143.

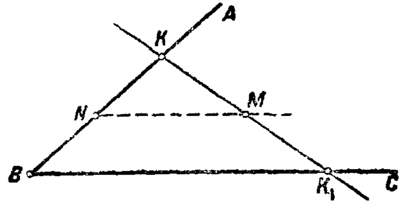


Рис. 144.

7. В треугольнике ABC биссектрисы углов ABC и ACD пересекаются в точке E (рис. 143). Доказать, что $\angle E = \frac{1}{2} \angle A$.

8. Через точку M, данную внутри угла ABC (рис. 144), провести прямую так, чтобы отрезок ее между сторонами угла делился в точке M пополам.

Указания к контрольным вопросам.

1. Обозначив углы $3x$, $4x$ и $5x$, имеем: $3x + 4x + 5x = 180°$, откуда $12x = 180°$ и $x = 15°$; значит, $3x = 45°$, $4x = 60°$ и $5x = 75°$. Полезно эту задачу решить и в общем виде, когда углы относятся, как $a:b:c$.

2. Здесь возможны два решения: а) $2x + 2x + 5x = 180°$ и $x = 20°$ или б) $2x + 5x + 5x = 180°$ и $x = 15°$.

3. Меньший катет, лежащий против угла в 30°, равен 5,5 *м*, а потому искомая проекция гипотенузы также равна 5,5 *м*.

4. Угол при вершине и угол между боковыми высотами имеют взаимно перпендикулярные стороны, а потому искомый угол или равен 36° или равен $180° - 36° = 144°$.

7. Из треугольников AOB и COE (рис. 143) имеем:

$$\alpha + \beta = \delta + x \quad \text{и} \quad x = \alpha + \beta - \delta,$$

но

$$2\delta = \alpha + 2\beta \quad \text{и} \quad \delta = \frac{\alpha}{2} + \beta,$$

а потому

$$x = \alpha + \beta - \frac{\alpha}{2} - \beta = \frac{\alpha}{2}.$$

8. Анализ. Допустим, что задача решена и прямая KK_1, проходящая через точку M (рис. 144), проведена, причем $MK = MK_1$. Тогда M — середина стороны KK_1 треугольника BKK_1. Проведя $MN \parallel K_1B$, найдем и на стороне BK точку N — середину стороны BK.

Построение. Проводим $MN \parallel CB$; откладываем $NK = BN$ и проводим через K и M искомую прямую.

Доказательство. $MK = MK_1$, так как N — середина BK и $MN \parallel BC$.

Исследование. Задача всегда возможна и имеет одно решение.

Другой способ решения этой задачи дан в разделе „четырехугольники".

§ 12. Четырехугольники и многоугольники. Задачи, связанные с ними.

Четырехугольники.

1. Работа над этой темой должна научить учащихся различать отдельные виды четырехугольников, знать их признаки и свойства, уметь их строить. Не следует ограничиваться тем, что учащиеся правильно перечисляют все свойства отдельных четырехугольников; необходимо проверить и убедиться в том, что каждый учащийся умеет привести нужное доказательство того, что тот или иной четырехугольник действительно обладает определенными, присущими ему свойствами. Надо добиться, чтобы учащиеся понимали, что прямоугольник, ромб и квадрат — параллелограмы, что все свойства параллелограма присущи и им и что кроме того каждый из них обладает специфическими свойствами, которые вытекают из своеобразия его формы.

Следует сопоставлять свойства отдельных четырехугольников. Так, диагонали параллелограма, а следовательно и прямоугольника, ромба и квадрата, взаимно делятся пополам, однако диагонали равны только в прямоугольнике и, следовательно, в квадрате и не равны в параллелограме с острым углом, т. е. в косоугольном параллелограме и, следовательно, в ромбе; диагонали делят углы пополам в равностороннем параллелограме и не делят их на равные части в неравностороннем параллелограме.

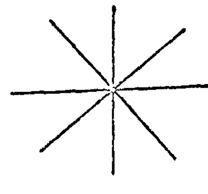
Особо следует остановить внимание учащихся на признаках, позволяющих отнести четырехугольник к тому или иному виду параллелогра-

мов. Изучение каждой фигуры должно быть, по возможности, целостным: изучаются признаки и свойства фигуры, а также способы ее построения по достаточному числу ее элементов.

2. Разбор темы следует начать с рассмотрения общего вида четырехугольника и притом выпуклого.

Дается определение: *четырехугольник — часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной линией, состоящей из четырех отрезков.*

Следует следить за четкостью определения понятия „четырехугольник". Нередко встречающееся определение: „четырехугольник — плоская фигура, состоящая из четырех пересекающихся отрезков", — неверно, как видно из рисунка 145.



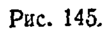


Рис. 145.

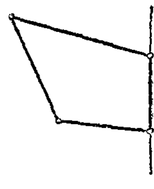


Рис. 146.

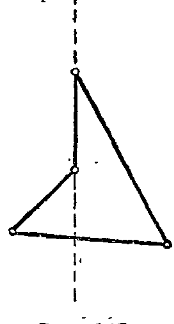


Рис. 147.

Вместе с тем указывается, что в элементарном курсе геометрии рассматриваются лишь в ы п у к л ы е четырехугольники (рис. 146), невыпуклые четырехугольники (рис. 147) рассмотрению не подлежат.

Выпуклым четырехугольником называется четырехугольник, расположенный по одну сторону от любой его стороны, что не имеет места в невыпуклом четырехугольнике (рис. 147).

3. При рассмотрении суммы внутренних и внешних углов выпуклого четырехугольника устанавливается, что как сумма внутренних его углов, так и сумма внешних его углов равна $4d$.

Параллелограм.

4. Из всех видов четырехугольников следует рассмотреть в первую очередь параллелограм. *Параллелограм — четырехугольник, в котором противолежащие стороны попарно параллельны.*

Дается прием вычерчивания параллелограма: проводятся две параллельные прямые, которые затем пересекаются двумя другими параллельными прямыми (рис. 148).

Рис. 148.

Равенство противолежащих и сторон и углов параллелограма, а также пополнительность его углов, прилежащих к любой из его сторон, не следует доказывать особо; эти свойства параллелограма должны быть формулированы учащимися на основании их знакомства с теорией параллельных прямых.

Учащиеся должны знать, что для вычисления всех углов параллелограма достаточно знать только величину одного из них.

Следует остановиться на разъяснении понятия о высоте параллелограма; обращается внимание учащихся на то, что из вершины D парал-

лелограма $ABCD$ можно провести две высоты: $h_a = DE$ и $h_b = DF$ (рис. 149). Необходимо подчеркнуть, что высота есть кратчайшее расстояние между параллельными сторонами параллелограма (рис. 150).

5. Изучение свойств диагоналей параллелограма позволяет вернуться к признакам равенства треугольников; учащимся должно быть дано четкое указание, чем следует руководствоваться при выборе треугольников, с помощью которых можно обнаружить равенство отдельных отрезков диагоналей параллелограма.

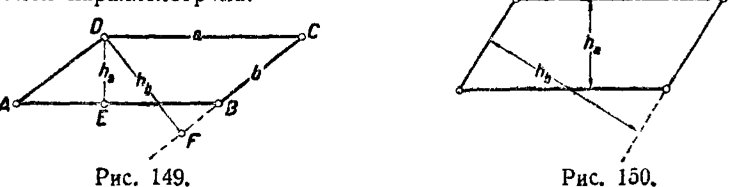


Рис. 149. Рис. 150.

Следует иметь в виду, что после рассмотрения теоремы о диагонали, делящей параллелограм на два равных треугольника, должно быть выполнено построение параллелограма: 1) по двум его смежным сторонам a и b и одной из диагоналей d и 2) по двум его смежным сторонам a и b и углу α между ними. Выполняя построение, учащиеся убеждаются, что в обоих случаях построение сводится к построению треугольника, который затем „дополняется" до параллелограма, при этом им должно быть указано, что построение параллелограма выполняется без проведения параллельных прямых.

После изучения свойств диагоналей параллелограма следует решить задачи на построение параллелограма: 1) по двум его диагоналям d_1 и d_2 и стороне a и 2) по двум его диагоналям d_1 и d_2 и углу α между ними.

И в данном случае построение параллелограма сводится к построению треугольника, две стороны которого соответственно равны половине каждой из диагоналей, а затем — к дополнению треугольника до параллелограма.

Решение указанных задач должно показать учащимся, что наличие трех независимых данных, позволяющих построить треугольник, достаточно для построения параллелограма.

6. Прежде чем перейти к выяснению, какие и сколько независимых данных определяют параллелограм, следует при помощи шарнирного параллелограма показать учащимся, что при одной и той же длине смежных сторон, а следовательно при одном и том же периметре, вид параллелограма зависит от величины его угла.

Ставится вопрос о признаках равенства параллелограмов. Учащиеся, выполнив указанные выше построения параллелограмов, подготовлены к нужному ответу. Признаки равенства параллелограмов аналогичны признакам равенства треугольников. Однако учащимся должно быть разъяснено, что первый признак равенства треугольников — по стороне и двум прилежащим углам — по отношению к параллелограмам соответствует признакам: два параллелограма равны: 1) по стороне и двум углам, которые образуют диагонали с этой стороной, или 2) по диагонали и двум углам, которые образуют диагональ со смежными сторонами.

Такая проработка вопроса помогает учащимся уяснить себе, что параллелограм определяется тремя его независимыми элементами. Вместе с тем разъясняется, что в силу этого нельзя утверждать, что параллелограмы равны по стороне и двум прилежащим к ней углам, так как углы параллелограма не независимы друг от друга, ибо величина одного из них определяет собою все остальные углы параллелограма.

7. Необходимо остановиться на разъяснении учащимся, что в неравностороннем параллелограме диагональ не делит углы параллелограма пополам, а следовательно и не является их биссектрисой. Это должно быть четко усвоено учащимися во избежание часто делаемых ими в этом вопросе ошибочных заключений. В силу сказанного полезно решить задачу:

биссектриса угла неравностороннего параллелограма делит его сторону на два отрезка, равные a и b. Вычислить периметр параллелограма.

Решение. Биссектриса AE делит сторону DC параллелограма $ABCD$ (рис. 151) на части a и b. $\angle 1 = \angle 2$ по условию, а $\angle 3 = \angle 1$, как накрест лежащие, а потому $\angle 2 = \angle 3$, и, следовательно, треугольник ADE — равнобедренный и $AD = DE = a$. Отсюда периметр параллелограма равен:

$$P = a + b + a + a + b + a = 4a + 2b = 2(2a + b).$$

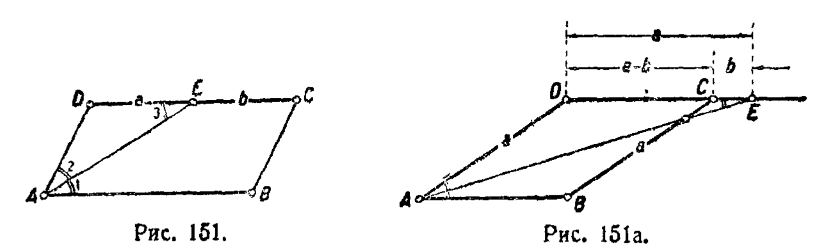


Рис. 151. Рис. 151а.

Следует рассмотреть и случай, когда биссектриса угла пересекает продолжение стороны параллелограма. Тогда $P = 2(2a - b)$ при $a > b$ (рис. 151а).

8. В качестве самостоятельной работы на построение могут быть даны следующие задачи: построить параллелограм 1) по стороне, диагонали и углу между ними, 2) по стороне, прилежащему к ней углу и диагонали, не проходящей через вершину данного угла, 3) по двум сторонам и высоте (два решения).

9. Когда изучены свойства параллелограма и учащиеся приобрели навык в построении параллелограмов, надлежит рассмотреть три признака параллелограмов.

Четырехугольник — параллелограм, если:

1) две его противолежащие стороны равны и параллельны,
2) противолежащие его стороны попарно равны,
3) диагонали его взаимно делятся пополам.

Признаки параллелограмов должны быть твердо усвоены учащимися.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Сколько всего диагоналей можно провести из одной вершины семиугольника?

2. Острый угол параллелограма равен α. Чему равен угол между его высотами?

3. Выразить периметр параллелограма формулой через значения его сторон a и b.

4. Почему в косоугольном параллелограме диагонали не равны?

5. В параллелограме $ABCD$ из вершин его B и D проведены высоты BF и DE (рис. 152). Доказать, что $\triangle CDE = \triangle BAF$.

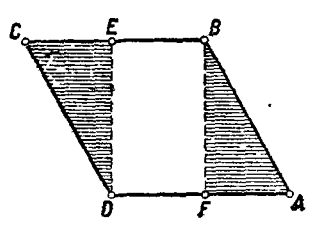
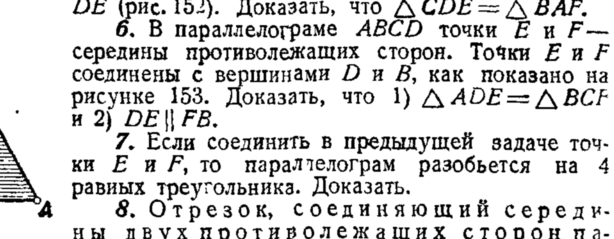


Рис. 152.



6. В параллелограме $ABCD$ точки E и F — середины противолежащих сторон. Точки E и F соединены с вершинами D и B, как показано на рисунке 153. Доказать, что 1) $\triangle ADE = \triangle BCF$ и 2) $DE \parallel FB$.

7. Если соединить в предыдущей задаче точки E и F, то параллелограм разобьется на 4 равных треугольника. Доказать.

8. О т р е з о к, с о е д и н я ю щ и й с е р е д и н ы д в у х п р о т и в о л е ж а щ и х с т о р о н п а р а л л е л о г р а м а, н а з ы в а е т с я е г о с р е д н е й л и н и е й.

Доказать, что средняя линия параллелограма параллельна двум другим сторонам и равна их полусумме или каждой из них.

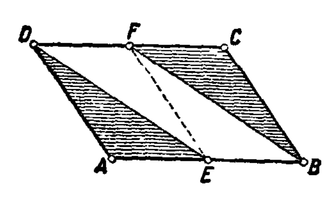


Рис. 153.

9. Средняя линия параллелограма проходит через точку пересечения диагоналей. Доказать.

10. Стороны параллелограма $a = 3$ *см* и $b = 5$ *см*. Биссектрисы углов, прилежащих к меньшей стороне a, пересекают противолежащую ей сторону в точках M и N (рис. 154). Найти длину отрезка MN.

11. Диагонали параллелограма равны d_1 и d_2. Через вершины параллелограма проведены прямые, параллельные диагоналям, до взаимного их пересечения. Определить, какая получилась фигура, и вычислить ее периметр.

12. Построить параллелограм по двум его высотам, h_1 и h_2, проведенным из одной и той же вершины, и углу α между ними (рис. 155).

13. Построить параллелограм по стороне a и диагонали d_1, составляющей с данной стороною прямой угол.

14. Через точку M внутри угла ABC провести прямую так, чтобы отрезок ее между сторонами угла делился в точке M пополам.

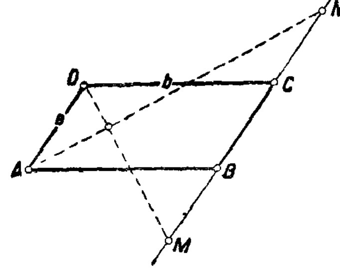


Рис. 154.

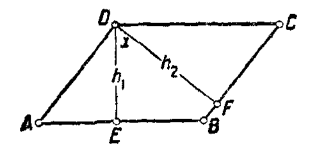


Рис. 155.

Указания к контрольным вопросам.

2. Угол между высотами равен α или $180° - \alpha$, так как стороны его перпендикулярны к сторонам угла α.

4. Если допустить, что диагонали в косоугольном параллелограме равны (рис. 156), то треугольник ABC должен равняться треугольнику ABD (ССС) и, следовательно, $\angle DAB = \angle ABC$, что невозможно, ибо один из них — острый, а другой — тупой,

6. $\triangle ADE = \triangle BCF$ по двум сторонам и углу между ними, так как $AD = BC$, $AE = FC$ как половины равных сторон и $\angle A = \angle C$. В четырехугольнике $DFBE$ отрезки $DF \underline{\parallel} BE$, а потому, согласно признаку параллелограмов, четырехугольник $DFBE$ — параллелограм.

10. $\triangle ABN$ — равнобедренный (рис. 154) и $NB = AB = b$, также и $\triangle DCM$ — равнобедренный и $CM = CD = b$, отсюда имеем:

$$NB + CM = b + b = 2b.$$

Но

$$NB = NC + CB$$

и

$$CM = CB + BM,$$

а потому

$$NB + CM = NC + CB + CB + BM = 2b,$$

но

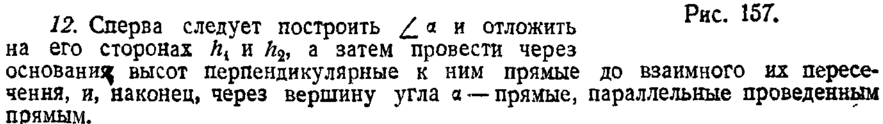
$$NC + CB + BM = NM \quad \text{и} \quad BC = a,$$

а потому

$$NM = 2b - a = 10 - 3 = 7 \text{ см}.$$

Рис. 156.

Рис. 157.



12. Сперва следует построить $\angle \alpha$ и отложить на его сторонах h_1 и h_2, а затем провести через основания высот перпендикулярные к ним прямые до взаимного их пересечения, и, наконец, через вершину угла α — прямые, параллельные проведенным прямым.

13. Построение видно из рисунка 157.

14. Анализ. Пусть задача решена и прямая KK_1 проведена, причем $MK = MK_1$ (рис. 158). Соединив точку M с точкой B, имеем BM — медиана треугольника. Продолжив ее за точку M на расстояние $MN = MB$ и соединив точку N с точками K и K_1, получаем параллелограм BK_1NK; следовательно, $NK \parallel BC$ и $NK_1 \parallel AB$.

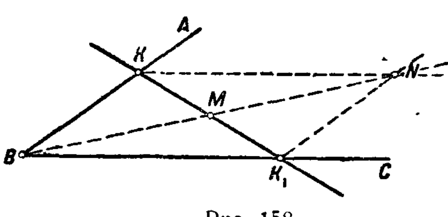


Рис. 158.

Построение. Соединяем точку M с точкой B и продолжаем BM за точку M на расстояние $MN = MB$. Проведем $NK \parallel BC$ и прямую через K и M, тогда KK_1 – искомая прямая.

Доказательство. BK_1NK — параллелограм, а потому диагонали его делятся в точке M пополам, т. е. $MK = MK_1$.

Исследование. Построение всегда возможно и допускает только одно решение.

Следует обратить внимание учащихся на то, что одна и та же задача на построение может быть решена различными методами в зависимости от того места, в котором она помещена. Другое решение этой задачи было приведено в разделе „параллельные прямые".

Понятие о центральной симметрии.

10. Понятие о центральной симметрии должно быть дано учащимся в связи с изучением параллелограма.

Учащиеся вспоминают, какие фигуры называются симметричными относительно оси. Рассматривается равнобедренный треугольник; учащиеся вспоминают, что высота, проведенная из угла при вершине равнобедренного треугольника, есть ось симметрии треугольника, что перегибанием треугольника по этой его высоте одна часть треугольника полностью совпадает с его другой частью; рассматривается также еще раз и биссектриса угла, которая служит осью симметрии сторон угла. Затем предлагается учащимся проверить перегибанием неравностороннего параллелограма по одной из его диагоналей, не является ли диагональ осью его симметрии.

Учащиеся убеждаются, что треугольники ADC и ABC (рис. 159), не совмещаются и что, таким образом, диагональ AC не служит осью симметрии параллелограма $ABCD$.

Затем следует показать учащимся на модели, что треугольники, на которые разбивается параллелограм диагональю, совмещаются, если повернуть один из них на 180° вокруг точки пересечения диагоналей.

Модель может быть изготовлена самими учащимися. Вырезывают из толстого картона или фанеры два равных параллелограма, накладывают их один на другой и скрепляют их шарнирным винтом в точке пересечения их диагоналей.

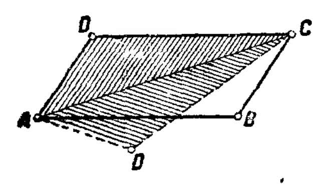


Рис. 159.

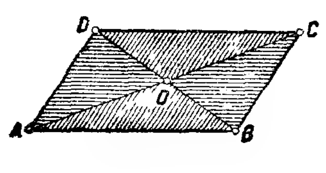


Рис. 160.

Дается определение: *фигура называется центрально-симметричной относительно точки O, центра симметрии, если любой точке ее M соответствует другая точка M_1 фигуры, отстоящая от центра O на такое же расстояние, как и точка M, и лежащая на одной прямой с M и O.* Следовательно, две точки — A и C, B и D, два отрезка — AB и CD, AD и BC, OA и OC, OB и OD и две фигуры — $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$, $\triangle AOB$ и $\triangle DOC$, $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$ (рис. 160) центрально-симметричны относительно точки O.

Параллелограм — центрально-симметричная фигура с центром симметрии в точке пересечения его диагоналей. Косоугольные и одновременно неравносторонние параллелограмы не имеют осей симметрии.

Решается задача:

если в параллелограме через точку O пересечения его диагоналей провести произвольную прямую, пересекающую его стороны, то отрезок прямой, заключенный между этими сторонами, делится в точке O пополам и параллелограм разбивается этой прямой на две равные части.

Разбор понятия о центрально-симметричных фигурах целесообразно начать с решения указанной задачи.

11. Учащиеся должны четко уяснить себе, что прямоугольник — прямоугольный параллелограм и, как таковой, обладает всеми свойствами параллелограма и кроме того характерной для него особенностью: диагонали его равны.

Следует обратить внимание учащихся на то, что проведенные в прямоугольнике диагонали разбивают его на попарно равные равнобедренные треугольники. Осознание этого факта существенно важно для построения прямоугольника по диагоналям и углу между ними.

При построении прямоугольника по заданным элементам учащиеся должны, как это они делали при построении параллелограма, построить сперва треугольник, а затем дополнить его до прямоугольника; понятно, что в силу своеобразия прямоугольника строится прямоугольный

треугольник, если заданы смежные стороны a и b или одна из сторон a или b и диагональ d прямоугольника, или же строится **равнобедренный** треугольник, если заданы диагональ и угол между диагоналями прямоугольника.

Учащиеся должны знать, что для построения прямоугольника, в отличие от параллелограма, достаточно знать только два его независимых элемента, которыми прямоугольник вполне определен.

Разъясняется, что неравносторонний прямоугольник, как и параллелограм, — фигура центрально-симметричная, но кроме того имеет еще **две оси симметрии**. Учащиеся убеждаются в этом путем перегибания такого прямоугольника по его **средним линиям**, которые и являются его осями симметрии.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. В прямоугольнике диагональ делит угол в отношении 2:3. Определить угол между диагоналями.

2. Перпендикуляры DE и BF, проведенные из вершин противолежащих углов прямоугольника $ABCD$ на его диагональ (рис. 161), образуют равные треугольники. Доказать. Объяснить, почему $DE \parallel BF$.

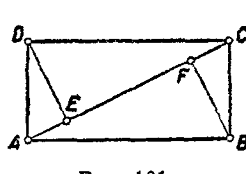


Рис. 161.

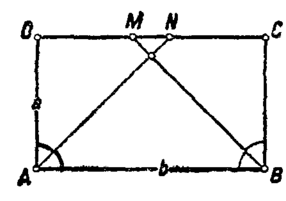


Рис. 162.

3. Меньшая сторона прямоугольника равна a. Чему равен его периметр, если известно, что биссектриса одного из его углов делит бóльшую сторону пополам?

4. Построить прямоугольник по стороне a и углу α между его диагоналями.

5. В прямоугольнике со сторонами a и b проведены биссектрисы углов A и B, которые пересекают сторону DC в точках M и N (рис. 162). Найти длину отрезка MN.

6. Как расположены относительно друг друга оси симметрии неравностороннего прямоугольника?

Указания к контрольным вопросам.

1. По условию $2x + 3x = 90°$ и $5x = 90°$, откуда $x = 18°$, $2x = 36°$ и $3x = 54°$. Значит, угол между диагоналями равен или 72° или 108°.

2. $DE \parallel BF$ по первому признаку параллельности двух прямых и $\triangle ADE = \triangle CBF$ по гипотенузе и острому углу.

3. Бóльшая сторона равна $2a$ и периметр равен $6a$.

4. Задача сводится к построению равнобедренного треугольника по основанию a и углу при вершине α или $180° - \alpha$.

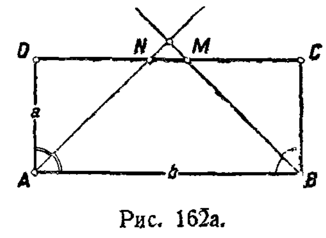


Рис. 162а.

5. Треугольники ADN и BCM (рис. 162) — равнобедренные и $DN = AD = a$ и $MC = CB = a$.

Пусть $MN = x$, тогда $DM = a - x$ и $NC = a - x$ и $DN + NC = a + a - x = b$, откуда $x = 2a - b$.

При расположении биссектрис, данном на рисунке 162а, имеем: $x = b - 2a$. Исследовать случай, когда $MN = 0$.

6. Оси симметрии неравностороннего прямоугольника взаимно перпендикулярны.

Ромб.

12. При определении ромба обращается внимание учащихся на то, что ромб — равносторонний параллелограм; в силу этого ромб обладает всеми свойствами параллелограма. Дается построение ромба по стороне a и углу α. Строят $\angle A = \alpha$ (рис. 163), на сторонах его откладывают отрезки AB и AD, равные a, а затем, приняв точки B и D за центры, проводят дуги радиусом, равным a, и соединяют точку пересечения C дуг с точками B и D. Полученная фигура — ромб.

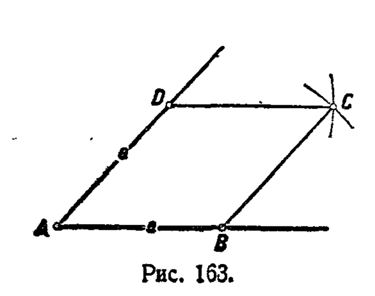


Рис. 163.

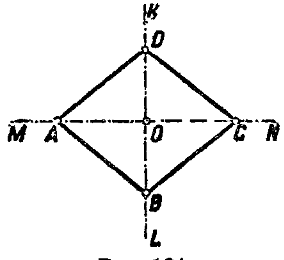


Рис. 164.

Особое внимание должно быть уделено характерным свойствам ромба, вытекающим из того, что диагонали служат осями симметрии:

диагонали ромба взаимно перпендикулярны, делят углы ромба пополам, делят ромб на 4 равных прямоугольных треугольника.

Решается задача:

построить ромб по его диагоналям d_1 и d_2.

Проводят две взаимно перпендикулярные прямые MN и KL (рис. 164), точка их пересечения O принимается за точку пересечения диагоналей ромба; по обе стороны от точки O откладывают на одном перпендикуляре отрезки, равные половине одной из диагоналей, на другом — отрезки, равные половине другой диагонали, а затем соединяют концы A, B, C и D отрезков; получается ромб $ABCD$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Вершины каких углов ромба соединяет меньшая его диагональ?

2. Доказать, что высоты ромба равны.

3. Чему равен острый угол ромба, если известно, что меньшая диагональ и сторона его равны?

4. Сторона ромба равна a; чему равна его высота, если известно, что угол ромба равен 150°?

5. Периметр ромба равен 16 *м*, а высота равна 2 *м*. Найти величину острого угла ромба.

6. Диагональ ромба разбивает его на два треугольника; найти длину диагонали, если известно, что сумма периметров обоих треугольников на 15 *см* больше периметра ромба.

Рис. 165.

7. Вершины противолежащих углов ромба соединены с серединами его сторон, как показано на рисунке 165. Пересечением прямых получается четырехугольник $KLMN$. Доказать, что четырехугольник $KLMN$ — параллелограм.

8. Построить ромб по его периметру $2p$ и высоте h.

9. Построить ромб по острому углу α и меньшей диагонали d.

10. Построить ромб по острому углу α и диагонали d, проходящей через данный угол α.

Указания к контрольным вопросам.

1. Вершины тупых углов.

2. Если провести из вершины тупого угла ромба обе его высоты, то образовавшиеся прямоугольные треугольники равны по гипотенузе и острому углу, а потому высоты равны как катеты равных треугольников.

3. В данном случае диагональ делит ромб на два равносторонних треугольника, а потому угол ромба равен 60°.

4. Другой угол ромба равен 30°, а потому высота равна $\frac{a}{2}$ как катет, лежащий против угла в 30°.

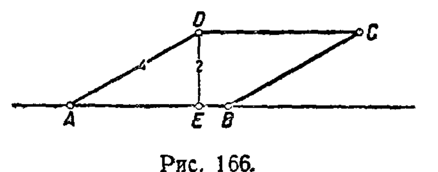


Рис. 166.

5. Сторона ромба равна 4 *м*. Из треугольника ADE (рис. 166) заключаем, что $\angle A = 30°$, так как $h = DE = 2$ *м* вдвое меньше гипотенузы $AD = 4$ *м*.

6. При подсчете суммы длин сторон обоих треугольников диагональ учитывается два раза, ее длина равна 15 *см*:2 = 7,5 *см*.

8. Вопрос сводится к построению прямоугольного треугольника по катету h и гипотенузе $\frac{p}{2}$. Для возможного решения необходимо, чтобы h было меньше $\frac{p}{2}$, $h < \frac{p}{2}$.

9. Задача сводится к построению равнобедренного треугольника по основанию d и углу при вершине a.

10. Вопрос сводится к построению равнобедренного треугольника по основанию d и углу при основании $\frac{a}{2}$.

Квадрат.

13. Квадрат определяется или как равносторонний прямоугольник или как равноугольный ромб.

Разъясняется, что квадрат, будучи разновидностью и прямоугольника и ромба, обладает всеми характерными свойствами последних.

Учащиеся должны уметь перечислить свойства сторон, углов и диагоналей квадрата. Следует отметить, что квадрат имеет 4 оси симметрии; ими являются две его диагонали и две средние его линии.

Квадрат, как и прямоугольник и ромб, — центрально-симметричная фигура. Следует выполнить построение квадрата по его стороне и по его диагонали.

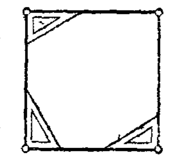


Рис. 168.

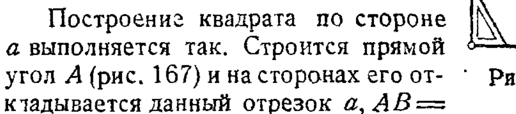


Рис. 167.

Построение квадрата по стороне a выполняется так. Строится прямой угол A (рис. 167) и на сторонах его откладывается данный отрезок a, $AB = AD = a$. Приняв точки B и D за центры, проводят дуги радиусом, равным a; точка пересечения C дуг соединяется с точками B и D. Полученная фигура — квадрат.

Следует также показать учащимся построение квадрата по данной его стороне при помощи угольника. Построение выполняется, как показано на рисунке 168.

Для построения квадрата по данной его диагонали следует провести две взаимно перпендикулярные прямые и отложить на них, считая от

точки их пересечения отрезки, равные половине диагонали, а затем соединить между собою концы отрезков. Так построенная фигура — квадрат (рис. 169).

Рис. 169.

Выполненнем указанных построений учащиеся убеждаются, что для построения квадрата достаточно знать только *один* его *линейный* элемент.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Чем отличается квадрат от прямоугольника и ромба?

2. Сумма периметров четырех треугольников, на которые квадрат разбивается его диагоналями, больше периметра квадрата на 20 *м*. Чему равна диагональ квадрата?

3. Дан квадрат со стороною в 3 *дм*, а диагональ его служит стороною другого квадрата. Найти диагональ второго квадрата.

4. Если соединить середины двух противолежащих сторон квадрата с вершинами его углов, как показано на рисунке 170, то получится четырехугольник *MENF*. Доказать, что четырехугольник *MENF* — ромб.

5. Столяр, желая проверить, имеет ли доска стола форму квадрата, измеряет ее стороны и находит, что они равны. Достаточно ли это, чтобы решить, что доска стола — квадрат? Достаточно ли измерить диагонали стола и убедиться, что они равны?

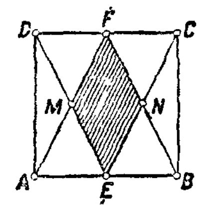


Рис. 170.

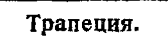
Указания к контрольным вопросам.

1. Квадрат отличается от прямоугольника тем, что стороны его равны, а у прямоугольника они могут быть и не равны; от ромба он отличается тем, что углы его прямые, а у ромба они могут быть и не прямыми.

2. Сумма периметров треугольников превышает периметр квадрата на длину, равную сумме обеих диагоналей, а потому каждая из них равна 10 *м*.

3. Задача решается построением. Диагональ второго квадрата равна 6 *дм*.

5. Недостаточно, ибо у ромба стороны тоже равны; недостаточно и одного равенства диагоналей, ибо и у прямоугольника диагонали равны. Необходимо, чтобы и стороны были равны и диагонали равны.



14. Ознакомление с трапецией целесообразно провести следующим образом. Строится треугольник произвольной формы, который пересекается прямою, параллельной его основанию; получаются две фигуры: треугольник и трапеция.

Дается определение: ***трапеция — четырехугольник, две противолежащие стороны которого параллельны.***

Указывается, что в трапеции рассматривают д в а основания; строится высота трапеции, проводятся ее диагонали.

Должно быть уделено внимание углам трапеции; в трапеции два угла, прилежащие к боковой ее стороне, — углы внутренние односторонние и, следовательно, в сумме дают $2d$.

Ставится вопрос, может ли сумма двух углов, прилежащих к основанию трапеции, быть равной $2d$; указывается, что в таком случае боковые стороны трапеции должны быть параллельными, и тогда трапеция обращается в параллелограм, в частном случае в прямоугольник или квадрат.

15. Следует особо рассмотреть равнобедренную трапецию: свойство двух ее углов, прилежащих к основанию, а также углов противолежащих, свойство ее диагоналей, ее ось симметрии — среднюю линию оснований.

В качестве упражнений дается для доказательства теорема: **во всякой равнобедренной трапеции равны: 1) диагонали, 2) треугольники, образованные отрезками диагоналей и боковыми сторонами** (рис. 171), **3) как *верхние, так и нижние отрезки, образованные пересечением диагоналей.***

Действительно, из равных треугольников ABC и ABD, у которых сторона AB — общая, $AD = BC$ и $\angle DAB = \angle CBA$, следует, что $AC = BD$, т. е. диагонали равны. Кроме того из равенства треугольников вытекает, что $\angle ADB = \angle ACB$ и $\angle BAC = \angle DBA$, а потому и $\angle DAC = \angle DBC$; следовательно, $\triangle AOD = \triangle BOC$ по стороне и двум прилежащим углам, и потому соответственно равны отрезки диагоналей: $OD = OC$ и $OA = OB$.

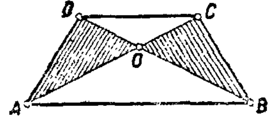


Рис. 171.

16. Существенное место должно быть отведено теореме о средней линии боковых сторон трапеции. Теорема эта доказывается или на основе теоремы о средней линии треугольника или независимо от нее.

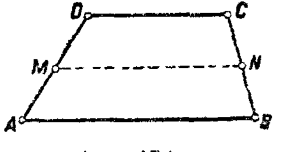


Рис. 172.

В последнем случае теорема о средней линии треугольника может быть выведена как *следствие из теоремы о средней линии трапеции.*

Мы считаем, что теорему о средней линии треугольника следует рассмотреть самостоятельно ввиду ее самодовлеющей ценности; теорема дает материал для постановки ряда задач, а выполняемые при ее доказательстве построения используются впоследствии при превращении треугольника в равновеликий параллелограм.

Могут быть предложены следующие вопросы:

а) доказать, что отрезки, соединяющие середины всех трех сторон треугольника ABC, разбивают его на 4 равных треугольника;

б) чему равен периметр каждого такого треугольника, если периметр треугольника ABC равен 40 *см*?

После этого теорема о средней линии треугольника может быть рассмотрена и как следствие из теоремы о средней линии трапеции.

Действительно, $MN = \frac{AB + CD}{2}$ (рис. 172). Если допустить, что вершина C, перемещаясь вдоль прямой CD, сольется с вершиной D, то $CD = 0$, трапеция $ABCD$ обращается в треугольник и $MN = \frac{AB + 0}{2} = \frac{AB}{2}$, т. е. средняя линия треугольника равна половине третьей стороны.

Учащимся должно быть также указано, что средняя линия трапеции равна среднему арифметическому обоих ее оснований.

При доказательстве теоремы о средней линии треугольника мы по аналогии с теоремой о средней линии трапеции заключаем, что средняя линия треугольника равна половине параллельной ей стороны; треугольник при этом рассматривается как предельный случай трапеции, одна из параллельных сторон которой обратилась в точку и, следовательно, равна

нулю. Можно также по аналогии заключить, что и средняя линия трапеции с пересекающимися боковыми сторонами AD и BC (рис. 173) обладает некоторыми свойствами обычной трапеции, если условиться считать, что основания трапеции $ABCD$ имеют различные направления, и принять основания за направленные отрезки, при этом одно основание, положим a, с положительным знаком, другое основание b, с отрицательным знаком; тогда $MN=\frac{a+(-b)}{2}=\frac{a-b}{2}$. В том случае, когда в четырехугольнике $ABCD$ (рис. 174) a окажется равным b, средняя *линия MN обратится в точку, и потому длина ее равна нулю;* действительно, $\frac{a-a}{2}=0$.

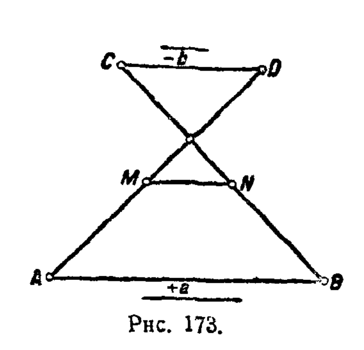


Рис. 173.

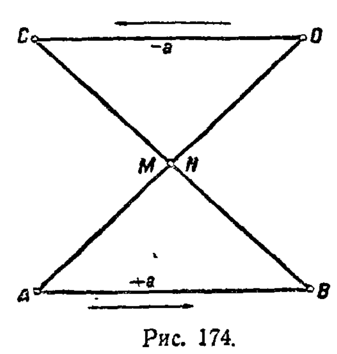


Рис. 174.

17. При решении задач на построение трапеции следует трапецию разделить диагональю на два треугольника, которые строятся последовательно, один за другим.

В отдельных случаях, в зависимости от данных условий, проводится через одну из вершин трапеции прямая, параллельная боковой стороне, и трапеция, таким образом, распадается на параллелограм и треугольник.

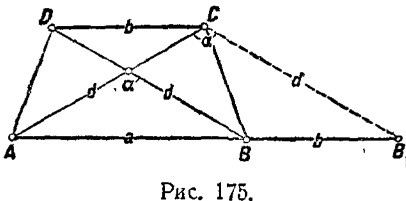


Рис. 175.

Так, при построении трапеции по четырем ее сторонам разбивают трапецию на параллелограм и треугольник.

Для построения трапеции вообще должны быть заданы четыре, для равнобедренной и прямоугольной — три независящих друг от друга элемента.

Задача на построение трапеции, если даны оба ее основания и боковые стороны, приведена в стабильном учебнике. Рассмотрим следующие две задачи:

1. Построить равнобедренную трапецию по ее основаниям a и b и диагонали d.

Решение. Из рисунка 175 заключаем: если перенести диагональ DB параллельно самой себе так, чтобы конец ее D совпал с вершиной C, то получается равнобедренный треугольник ACB_1, основание которого равно $a+b$, а боковая сторона равна d.

Отсюда следует, что нужно построить равнобедренный треугольник с основанием $a+b$ и боковой стороной d, отложить на основании

отрезок $AB=a$, соединить точку B с точкой C, а затем, приняв точки B и C за центры, провести окружности радиусами, соответственно равными отрезкам d и b, и соединить точку D их пересечения с точками A и C.

Задача возможна, если $a+b<2d$, где d — диагональ равнобедренной трапеции. Задача эта решена так называемым методом параллельного перенесения.

2. <u>Построить равнобедренную трапецию по данному основанию a, диагонали ее d и углу между диагоналями α.</u>

Задача эта также может быть решена методом параллельного перенесения и сводится к построению равнобедренного треугольника ACB_1 по боковой стороне d и углу при вершине α (рис. 175). Отложив затем на основании треугольника ACB_1 от его вершины A отрезок AB, равный a, находим по предыдущему четвертую вершину D и строим трапецию $ABCD$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. В равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны. Найти длину средней линии, если известно, что высота трапеции равна h (рис. 176).

2. Выпуклый четырехугольник, вершинами которого служат середины сторон трапеции, — параллелограм. Доказать.

3. Выпуклый четырехугольник, вершинами которого служат середины сторон равнобедренной трапеции, — ромб. Доказать.

4. Построить трапецию по данным двум основаниям a и b и двум диагоналям d_1 и d_2 ($d_1>d_2$).

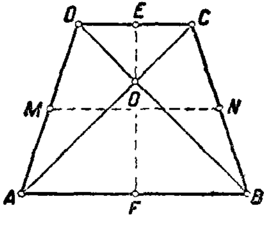


Рис. 176.

Указания к контрольным вопросам.

1. Треугольник DOC (рис. 176) — прямоугольный и равнобедренный; треугольник DOE — тоже прямоугольный и равнобедренный, а потому $DE=OE$ (1). Аналогичными рассуждениями убеждаемся, что $AF=$ $=OF$ (2).

Искомая средняя линия $MN=\frac{AB+CD}{2}=AF+DE$; принимая во внимание равенства (1) и (2), заключаем, что $MN=AF+DE=EO+OF=EF=h$. Итак, при заданных условиях $MN=h$.

4. Анализ: Провести из вершины трапеции прямую, параллельную одной из диагоналей, до пересечения с продолжением другого основания. После этого задача сводится к построению треугольника по трем сторонам d_1, d_2 и $a+b$. Условие возможности построения.

$$d_1-d_2<a+b<d_1+d_2.$$

Дельтоид.

18. После того как изучены основные виды четырехугольников, следует познакомить учащихся еще с одним из видов четырехугольников, с **дельтоидом**; это — фигура, составленная из двух равнобедренных треугольников ABC и ABD, приложенных друг к другу своими равными основаниями AB и расположенных по разные стороны от него (рис. 177). Следует показать, что если равнобедренные треугольники, из которых состоит дельтоид, равны, то дельтоид переходит в ромб;

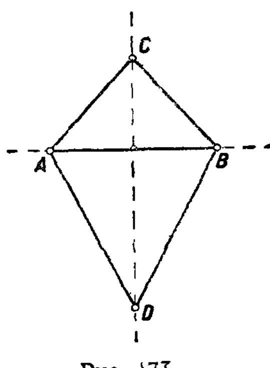


Рис. 177.

если же равнобедренные треугольники — одновременно и прямоугольные треугольники, то дельтоид переходит в квадрат.

Свойства диагоналей дельтоида (они взаимно перпендикулярны, и одна из них является осью симметрии дельтоида) вытекают из свойства равнобедренного треугольника.

Таблица четырехугольников.

19. После ознакомления с дельтоидом необходимо привести в систему сведения о четырехугольниках и составить таблицу четырехугольников.

Для иллюстрации перехода одного вида четырехугольников в другой должен быть использован шарнирный четырехугольник с раздвигающимися сторонами и диагоналями и таблица (рис. 178).

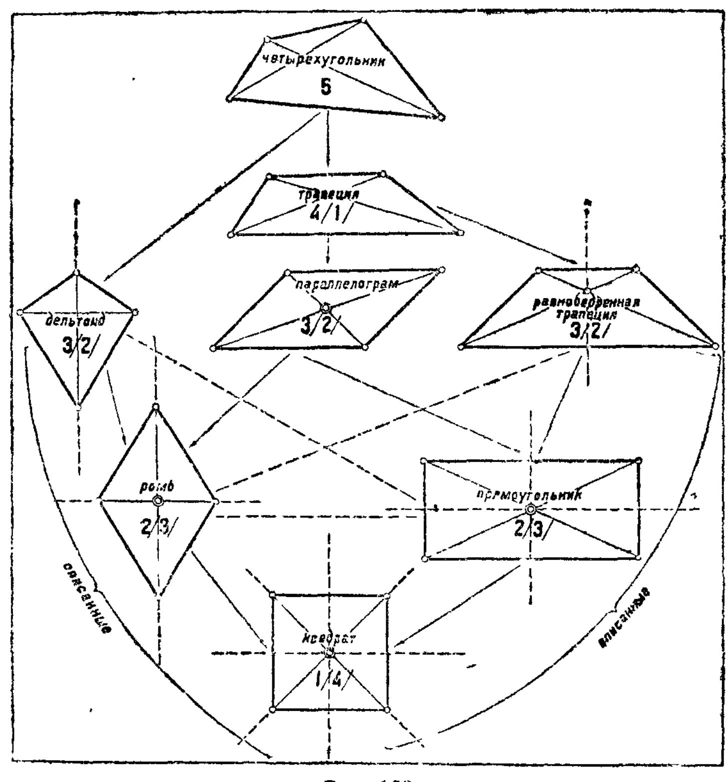


Рис. 178.

На таблице четырехугольники должны быть расположены в порядке, указанном на рисунке 178. На первом месте помещается выпуклый четырехугольник, его свойства следующие:

1) одна его сторона меньше суммы всех остальных сторон;

2) сумма внутренних его углов, как и сумма внешних его углов, равна $4d$;

3) диагонали его пересекаются и образуют 4 треугольника;

4) для его построения необходимо иметь 5 независимых элементов.

Если ввести затем один видовой признак — параллельность двух

сторон, то четырехугольник обращается в трапецию. На шарнирной модели можно показать, что для построения такой трапеции необходимы 4 независимых элемента; на таблице это отмечено числом, проставленным у фигуры, при этом в скобках проставлено число, указывающее число видовых признаков фигуры, выделяющих ее из общего числа всех видов четырехугольников.

Кроме перечисленных общих свойств четырехугольников трапеция имеет еще присущие только ей одной свойства: сумма углов, прилежащих к каждой из боковых сторон, равна $2d$.

Если присоединить к трапеции еще один видовой признак — параллельность двух других сторон или равенство двух боковых сторон, то трапеция переходит соответственно либо в параллелограм, либо в равнобедренную трапецию; обе эти фигуры могут быть построены по трем независимым данным. Эти четырехугольники, кроме свойств, присущих трапеции, обладают еще и другими, только им присущими свойствами: у параллелограма диагонали делятся взаимно пополам, у равнобедренной трапеции диагонали равны.

Если у параллелограма или у равнобедренной трапеции один из углов становится прямым, то они переходят в прямоугольники; присоединение еще одного видового признака уменьшает число элементов, необходимых для построения: оно равно двум, и т. д.

Из таблицы видно, что прямоугольник есть параллелограм, у которого один угол прямой, или равнобедренная трапеция, у которой один угол прямой, или трапеция, у которой углы при основании прямые, или четырехугольник, у которого 3 угла прямые.

Ромб есть параллелограм, у которого две смежные стороны равны, или дельтоид, у которого диагонали взаимно делятся пополам, или равносторонний параллелограм.

Квадрат есть прямоугольный ромб или равносторонний прямоугольник.

Таблица позволяет отметить взаимозависимость четырехугольников между собою, обращение одних фигур в другие, появление новых свойств у фигур в связи с появлением у них новых видовых признаков.

О построении четырехугольников.

20. Необходимо еще отметить, насколько важно добиться, чтобы учащиеся умели при построении того или иного четырехугольника использовать отдельные его свойства; этим умением учащиеся покажут, что фигура вместе с присущими ей свойствами ими осознана.

Так, косоугольный параллелограм вычерчивается следующим образом: сперва вычерчиваются две прямые, пересекающиеся в точке O под острым углом, а затем откладывают на одной из них отрезки $OA = OC$ (рис. 179), на другой — $OB = OD$ и соединяют прямыми точки A, B, C и D; полученный четырехугольник — параллелограм.

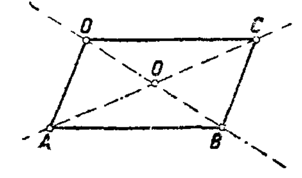


Рис. 179.

Если же отложить от точки O на прямых AC и BD равные отрезки, а именно $OA = OB = OC = OD$, то полученный четырехугольник — прямоугольник (рис. 180).

Для построения дельтоида проводят две взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке O, и на одной из них откладывают

отрезки $OA = OC$ (рис. 181), а на другой $OB > OD$ и соединяют точки A, B, C и D прямыми. Если же отложить и $OB = OD$, то полученный четырехугольник — ромб; наконец, когда кроме того еще и $AC = BD$, то четырехугольник — квадрат.

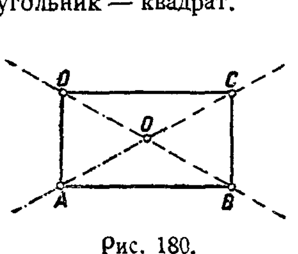


Рис. 180.

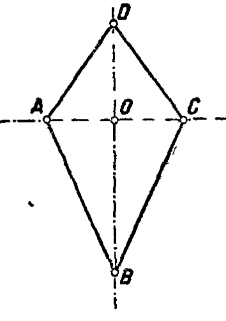


Рис. 181.

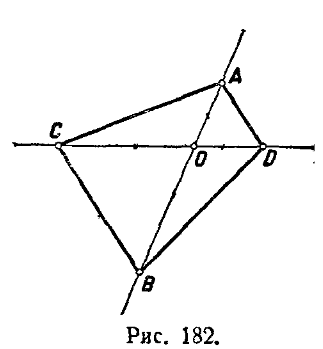


Рис. 182.

Для построения равнобедренной трапеции проводят две прямые, пересекающиеся в точке O, и откладывают отрезки $OA = OD$, $OB = OC$ (рис. 182); соединив затем точки A, B, C и D, получают равнобедренную трапецию.

При решении задач на построение следует всегда иметь в виду, что задача требует исследования, т. е. должно быть указано, при каких заданных условиях задача возможна и сколько она допускает решений.

Задачи из землемерной практики и задачи с препятствиями.

21. 1. Найти расстояние между двумя пунктами A и B, между которыми находится препятствие.

Берут произвольную точку C и провешивают CA и CB (рис. 183).

Если M и N — середины AC и BC, то $MN = \frac{1}{2} AB$ или $AB = 2MN$.

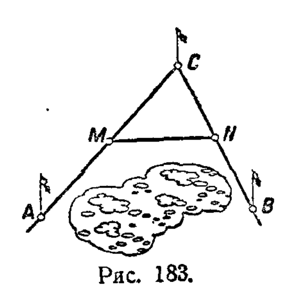


Рис. 183.

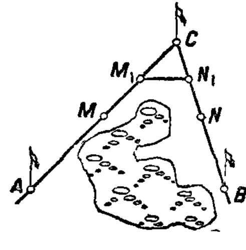


Рис. 184.

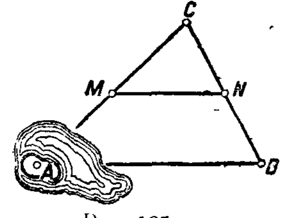


Рис. 185.

Решение задачи основано на теореме о средней линии треугольника. Если нельзя провешить прямую между пунктами M и N (рис. 184), то делят MC и NC пополам и получают $M_1N_1 = \frac{1}{2} MN = \frac{1}{4} AB$ и $AB = 4M_1N_1$.

2. Найти расстояние от доступного пункта B до недоступного пункта A (рис. 185).

Провешивают CA и CB и делят CB пополам в точке N; если провести $NM \parallel BA$, то:

$$MN = \frac{1}{2} AB \text{ и } AB = 2MN.$$

3. Найти расстояние между двумя недоступными пунктами A и B.

Провешивают базис C_1C_2 и из точек C_1 и C_2 — прямые по направлению к пунктам B и A. Если M — середина C_1C_2, то, проведя $MN \parallel C_2A$, получим точку N — середину C_1A; проведя $MP \parallel C_2B$, находят точку P — середину C_1B, а потому NP — средняя линия треугольника AC_1B, она равна $\frac{1}{2} AB$; следовательно, $AB = 2NP$.

Задача дана без рисунка; следует вообще иногда требовать от учащихся, чтобы они сами давали рисунок по тексту задачи.

Если нельзя провешить прямую NP, то поступают, как указано в задаче 2.

Все приведенные задачи решались одним и тем же методом, с использованием вывода теоремы о средней линии треугольника. Это указывает на значение этой теоремы для решения практических задач. Решая подобного рода задачи, учащиеся могут выявить и свою находчивость и свою способность к комбинированию. Не следует полагать, что развитие логического мышления — основная цель изучения математики; не менее важная цель изучения математики — развитие в учащихся их способности комбинирования — должна преследоваться при преподавании геометрии, и эта цель как нельзя лучше достигается решением умело подобранных задач.

Способность к комбинированию и к открытиям — вот что направляет на новые пути исследователя, в то время как строгая логическая мысль его должна проверять, насколько обоснованы выполняемые им построения. И учащимся необходимо привить стремление к открытиям, нужда в этом чувствуется при решении каждой задачи.

Имеется много схем и формул, при помощи которых те или иные вопросы решаются, не требуя особых усилий со стороны учащихся; с такими схемами и формулами следует знакомить учащихся и требовать, чтобы они умели пояснить их построение и разъяснить, как получены формулы; такие знания значительно облегчают учащимся решение более сложных задач.

Этой же цели служат „задачи-загадки" и задачи исторического содержания; каждому преподавателю хорошо известно, что такого рода задачи оживляют преподавание. Большую пользу в этом отношении может оказать книга Г. Н. Попова „Исторические задачи по элементарной математике" (изд. Гостехиздата, 1932). В предисловии к задачам автор говорит: „Нередко указывается не только обычное, современное решение (задачи), но и то, которое было предложено самим автором, иногда сложное, а чаще всего оригинальное и остроумное. Считаю эти указания полезными в смысле ознакомления с историческим ходом развития приемов и методов, практиковавшихся различными народами в разные эпохи. Помимо этого, смотря по важности затронутых вопросов, я везде давал исторические справки о происхождении методов и сведения о деятельности того или иного математика. Вкрапливание в преподавание такого рода сведений, полагаю, должно

повышать интерес к изучению математики и способствовать закреплению пройденного".

Необходимо также поощрять учащихся в составлении собственных задач. С каким удовольствием решаются такие задачи учащимися! Их они предпочитают задачам, предлагаемым преподавателем.

Но как побудить учащихся к открытию новых задач или переоткрытию задач, уже решенных, но им еще не известных? Ведь столетия, кажется, уже исчерпали все возможные вопросы, и безнадежно искать что-нибудь новое. Но это только так кажется на первый взгляд.

22. Чтобы побудить учащихся к открытию, необходимо поставить их в условия, вынуждающие их отыскивать новые пути, „изобретать". Задачи с препятствиями представляют в этом отношении прекрасный материал. Задачи такого рода стали проникать в педагогическую литературу с лишком 20 лет назад. Имеется прекрасная книжка на немецком языке Zühlke „Konstruktionen in begrenzter Ebene", в которой собрано большое число интересных задач „с препятствиями". Так, дана фигура, целиком не помещающаяся на данном листе бумаги, или „оборваны" углы и требуется провести линии к вершинам углов, не помеченным на чертеже, и т. д. Работу следует ставить так, чтобы учащиеся убеждались в том, что предлагаемые задачи не надуманы только для них, а что такие задачи имеют и определенное важное практическое значение; последнее всегда усиливает в учащихся интерес к работе.

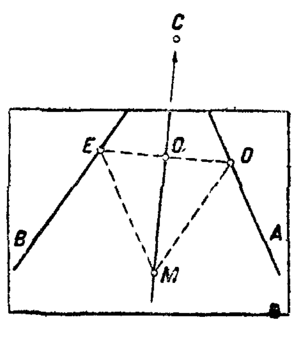


Рис. 186.

Некоторые из приведенных ниже задач взяты из указанного сборника.

4. Из точки M на плоскости провести прямую, проходящую через вершину C данного угла, если эта вершина не помещается на рисунке.

Проводим из точки M прямую $MD \parallel BC$ и $ME \parallel AC$ (рис. 186); соединив точки E и D прямой ED, разделим ED пополам, получим точку O, и тогда MO — искомая прямая. В самом деле, $MECD$ — параллелограм и ED — его диагональ, которая делит отрезок MC пополам, следовательно MC — вторая диагональ, должна пройти через вершину C параллелограма, вершину данного угла.

Когда анализ и построение задачи выполнены, следует рассмотреть с учащимися ту же задачу, несколько усложненную некоторыми дополнительными условиями; такая нарочито измененная задача может служить материалом для самостоятельной работы учащихся.

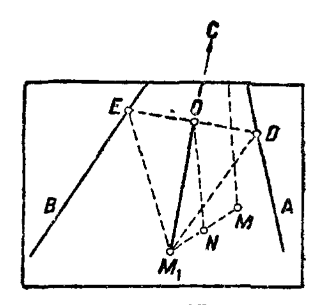


Рис. 187.

Так, предыдущая задача может быть усложнена, если выбрать точку M так, что одна из прямых или обе прямые, проведенные из точки M параллельно данным сторонам, не пересекают стороны на рисунке.

В этом случае возможно следующее построение: выбирают точку M_1 так, чтобы она была „удобно“ расположена, т. е. чтобы можно было выполнить требующееся для точки M_1 построение. Затем отмечают середину O отрезка ED и середину N отрезка MM_1 (рис. 187) и соединяют точку N с точкой O. Прямая, проходящая через точку M параллельно NO, и будет искомой прямой.

В самом деле, в треугольнике M_1CM точка N — середина стороны M_1M и точка O — середина стороны M_1C на основании предыдущей задачи, а потому $MC \parallel ON$.

И в данном случае использована теорема о средней линии треугольника.

В виде самостоятельной работы можно предложить учащимся разрешить вопрос для случая, когда точка M лежит вне угла. Решается такая задача таким же образом, как и предыдущая задача.

5. Провести в треугольнике его медианы, если на чертеже не дана одна из вершин треугольника.

Середина K стороны AB (рис. 188) находится непосредственно. Середина стороны BC будет найдена, если провести прямую $KL \parallel AC$, так же находится середина стороны AC, если провести прямую $KM \parallel BC$, и тогда отрезки AL и BM — медианы, третья же медиана находится, если соединить середины K и O стороны AB и отрезка ML.

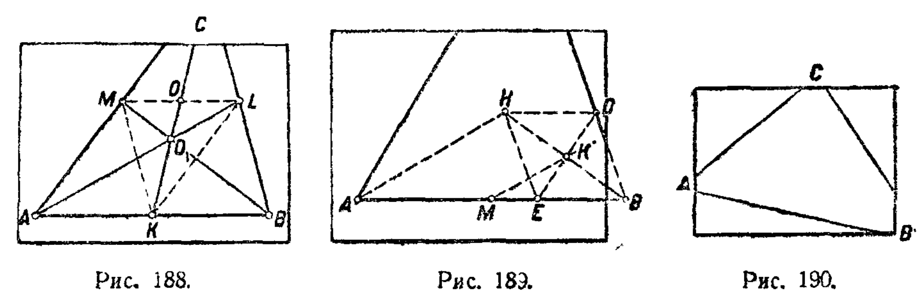


Рис. 188. Рис. 189. Рис. 190.

Данную задачу можно решить и несколько иначе: определяется точка O_1 пересечения медиан и проводится медиана KO_1, так как медианы пересекаются в одной точке; последнее построение можно привести учащимся только при условии, если соответствующая теорема о медианах им знакома.

Если у учащихся возникнет сомнение, разделит ли медиана KC отрезок ML пополам, то следует указать, что $KMCL$ — параллелограм, и напомнить учащимся о свойстве диагоналей параллелограма.

Задача более сложна, если две вершины треугольника, положим B и C, недоступны. В этом случае задача сводится к нахождению середины одной из сторон.

Действительно, возьмем где-нибудь внутри треугольника точку H (рис. 189) и проведем через нее прямую, проходящую через вершину B, приемом, примененным в задаче 4, стр. 122. Проводим затем из середины K отрезка DE прямую, параллельную HA; тогда M — середина отрезка AB. После этого определяются середины и остальных сторон и тем самым — и медианы треугольника.

Задача: **провести медианы в треугольнике, все три вершины которого недоступны** (рис. 190), — не должна уже представлять для учащихся каких-либо особых затруднений; она решается приемами уже решенных задач.

6. На рисунке 191 даны прямые AB и CD, пересекающиеся вне чертежа в некоторой точке M, и прямые EF и GH, также пресекающиеся вне чертежа в некоторой точке N. Найти длину отрезка MN, концами которого служат точки M и N пересечения данных прямых, а также середину этого отрезка.

Соединим произвольную точку K методом задачи 4 (стр. 122) с точками M и N. Отрезок M_1N_1, соединяющий середины отрезков A_1C_1 и G_1F_1, — средняя линия треугольника KMN, а потому $M_1N_1 = \frac{1}{2} MN$. Итак, длина искомого отрезка найдена: $MN = 2M_1N_1$.

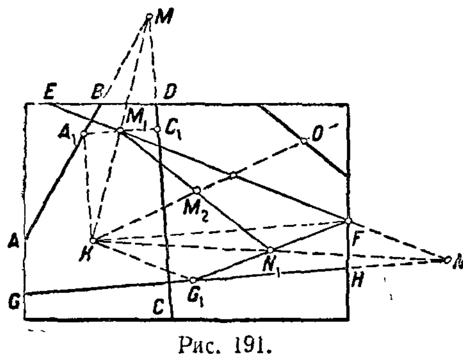


Рис. 191.

Если провести прямую через точку K и середину M_2 отрезка M_1N_1 до пересечения с прямой, соединяющей точки M и N, то точка O — середина отрезка MN, направление же отрезка MN параллельно M_1N_1.

Следует отметить, что подобного рода задачи должны являться необходимой составной частью преподавания, должны возникать в процессе работы с учащимися, иногда, быть может, и совершенно случайно для учащихся, но **предусмотренные** преподавателем в **плане** своей работы; необходимо также, чтобы преподаватель той или иной постановкой вопроса „наталкивал" учащихся на такого рода задачи.

Кроме приведенных задач на построение учащиеся должны решить ряд задач на построение четырехугольников, которое сводится к построению известных основных задач, а также задач на построение, рассмотренных раньше. Такие задачи приведены в стабильном учебнике в вопросах и упражнениях в главе XIV.

23. Следует рассмотреть с учащимися задачи, приемы решения которых могут быть использованы ими при решении более сложных задач на построение.

1. Разделить прямой угол на три равные части.

Отложив на стороне BA данного прямого угла ABC (рис. 192) от вершины его B произвольный отрезок и, приняв его за сторону равностороннего треугольника, построим равносторонний треугольник ABD; $\angle ABD = 60°$. Прямая BE — биссектриса угла ABD, и, следовательно, $\angle ABE = \angle EBD = \angle DBC = 30°$, или $\frac{1}{3}d$.

Рис. 192.

Этой задачей следует воспользоваться для решения следующей задачи „с препятствием“:

в конце A отрезка AB, который нельзя продолжить за точку A, провести перпендикуляр к AB.

Построим равносторонний треугольник ABC (рис. 193), проводим его биссектрису AE, на которой снова строим равносторонний треугольник AEF, тогда AF — искомый перпендикуляр.

Можно было бы построить и $\angle CAF = \angle EAC$ или провести $EK \perp AC$, продолжить его на отрезок $KF = KE$ и затем соединить точку F с точкой A.

2. Пересечь две стороны треугольника прямою, параллельною третьей стороне, так, чтобы отрезок параллельной между сторонами угла равнялся сумме отрезков этих двух сторон, прилежащих к третьей стороне.

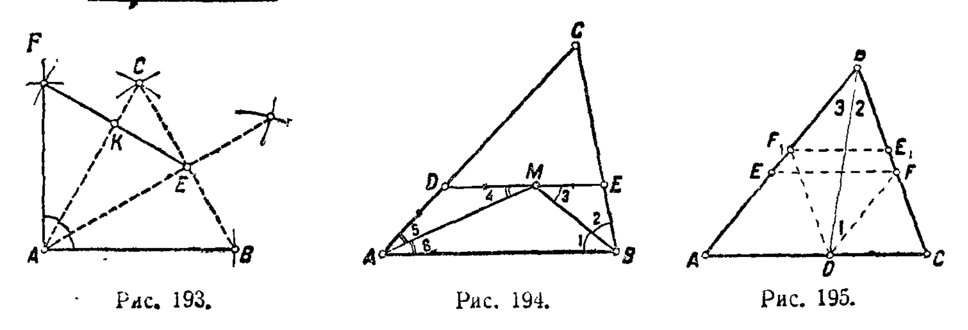


Рис. 193. Рис. 194. Рис. 195.

Допустим, что задача уже решена и $DE \parallel AB$, причем $DE = AD + BE$ (рис. 194), и пусть точка M взята на отрезке DE так, что $ME = EB$ и $MD = DA$. Соединив M с A и B, получим равнобедренные треугольники BEM и ADM; из этого следует, что $\angle 2 = \angle 3$ и $\angle 4 = \angle 5$; $\angle 3 = \angle 1$ и $\angle 4 = \angle 6$, как накрестлежащие; следовательно, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 5 = \angle 6$, а потому BM и AM — биссектрисы углов B и A и DE проходит через точку пересечения биссектрис параллельно AB.

Разбор задачи указывает, что построение проводится в следующей последовательности: 1) проводят биссектрисы BM и AM; они дают точку M; 2) через точку M проводят прямую $DE \parallel AB$; DE — искомый отрезок.

Доказательства мы не приводим. Задача всегда возможна и допускает только одно решение: биссектрисы треугольника всегда пересекаются и притом в одной только точке.

3. Провести прямую, параллельную указанному основанию треугольника, так, чтобы верхний отрезок одной боковой стороны равнялся нижнему отрезку другой боковой стороны.

Допустим, что задача уже решена: EF — искомая прямая, при этом $EF \parallel AC$ и $BF = AE$ (рис. 195).

Проводим $FD \parallel AB$ и соединим точку D с вершиной B. $AEFD$ — параллелограм, значит $AE = FD = BF$ и треугольник BDF — равно-

бедренный; следовательно, $\angle 1 = \angle 2$, но $\angle 1 = \angle 3$ как накрестлежащие, а потому $\angle 2 = \angle 3$, т. е. BD — биссектриса угла B.

Порядок построения: BD — биссектриса угла B; $DF \parallel AB$ и $FE \parallel AC$.

Правильность построения доказывается так: $\angle 2 = \angle 3$ и $\angle 3 = \angle 1$, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$ и $BF = FD$; но $AEFD$ — параллелограм, а потому $FD = AE$; значит $AE = BF$.

Если провести $DF_1 \parallel BC$ и $F_1E_1 \parallel AC$, то получим, что $BF_1 = E_1C$. Задача допускает два решения. В случае равнобедренного треугольника получается только одно решение, так как EF и E_1F_1 совпадают.

4. Разделить пополам угол ABC, вершина которого B недоступна.

Проводим $AM \perp AB$ и $CN \perp BC$ (рис. 196) и отложим на них отрезки $AA_1 = CC_1$ и $AA_2 = CC_2$. Затем проводим $A_1B_1 \parallel AB$ и $C_1B_1 \parallel CB$; прямые пересекутся в точке B_1. Далее проводим $A_2B_2 \parallel AB$ и $C_2B_2 \parallel CB$; прямые пересекутся в точке B_2. Прямая B_2B_1 — искомая биссектриса, так как точки B_1 и B_2 отстоят от сторон угла ABC на одинаковое расстояние.

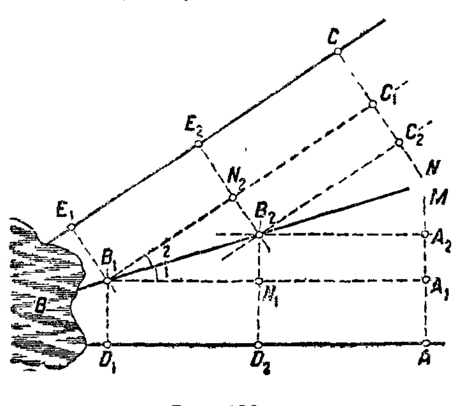


Рис. 196.

5. Построить треугольник по h_a, m_a и β_A.

6. В данный квадрат $ABCD$ со стороною m вписать квадрат $A_1B_1C_1D_1$ со стороною c так, чтобы вершины его лежали на сторонах данного квадрата.

Допустим, что задача решена и квадрат $A_1B_1C_1D_1$ вписан в квадрат $ABCD$ (рис. 197). Из рассмотрения рисунка заключаем, что от квадрата $ABCD$ отрезаны четыре равных прямоугольных треугольника, у которых гипотенуза c и сумма катетов равна m, а потому условие задачи может быть заменено равносильным условием:

построить прямоугольный треугольник по данной гипотенузе c и сумме катетов m.

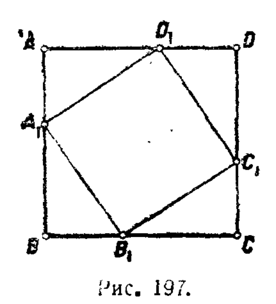


Рис. 197.

Пусть построен прямоугольный треугольник ABC (рис. 198). Продолжив BC за вершину C на расстояние $CC_1 = CA$, соединим точку C_1 с A. Таким образом, построение треугольника ABC_1 приводится к основному случаю построения треугольника по двум его сторонам $BC_1 = m$ и $BA = c$ и углу $C_1 = 45°$, лежащему против меньшей стороны. Построив треугольник ABC_1, проводим $AC \perp BC_1$, тогда треугольник ABC — искомый.

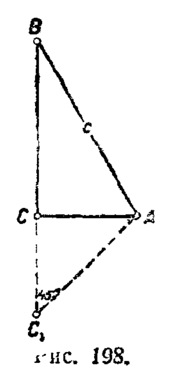


Рис. 198.

По двум данным сторонам треугольника и углу, лежащему против меньшей из них, можно, как известно, построить или два треугольника, или один, или ни одного.

Можно было бы найти вершину C и иначе: построить медиатрису стороны AC_1; она должна пройти через вершину C, так как треугольник ACC_1 — равнобедренный.

Решение задачи возможно, если $\frac{m}{\sqrt{2}} \leq c < m$.

7. Построить треугольник по его периметру $2p$ и углам α и β (рис. 199).

Анализ. Допустим, что задача решена и искомый треугольник построен. Прежде всего, заключаем, что если даны углы α и β, то третий угол треугольника $\angle C = 180^\circ - (\alpha + \beta)$. Если продолжить основание AB вправо на расстояние $BB_1 = BC$ и влево на расстояние $AA_1 = AC$ и соединить точку C с точками A_1 и B_1, то получится треугольник A_1CB_1, у которого сторона $A_1B_1 = 2p$ и $\angle A_1 = \frac{1}{2} \angle A$ и $\angle B_1 = \frac{1}{2} \angle B$.

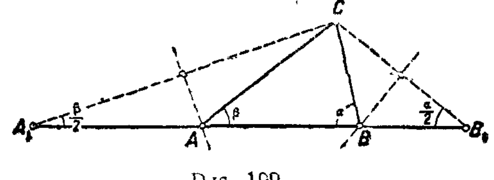


Рис. 199.

Построение треугольника A_1CB_1 есть задача основная (УСУ). Построив по данным задачи треугольник A_1CB_1, переходим к построению искомого треугольника. Треугольники BCB_1 и CAA_1 — равнобедренные, а потому их вершины должны лежать на медиатрисах сторон CB_1 и CA_1; пересечение медиатрис с прямой A_1B_1 определяют две другие вершины A и B искомого треугольника. Построение и доказательство не представляют затруднений. Задача всегда возможна, если $\alpha + \beta < 2d$.

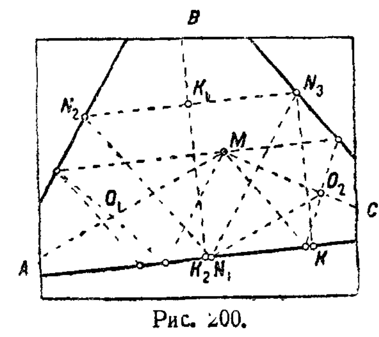


Рис. 200.

8. В треугольнике, вершины которого недоступны, провести его высоты.

Произвольную взятую в плоскости треугольника точку M соединим с двумя вершинами A и C треугольника и проводим $O_2N_1 \parallel MO_1$ (рис. 200); тогда N_1 — середина стороны AC. Проведя затем $N_1N_2 \parallel BC$ и $N_2N_3 \parallel AC$, находим середины N_1, N_2 и N_3 сторон треугольника.

Если провести $N_3K \perp AC$, то отрезок N_3K равен половине высоты h_b треугольника, ибо N_2N_3 — средняя линия треугольника. Отложив затем на N_2N_3 от точки N_2 отрезок $N_2K_1 = N_1K$ и проведя $K_1B \perp NN_3$, находим K_2K_1B — высоту треугольника. В самом деле, $\triangle N_2K_1B = \triangle N_1KN_3$ и $K_1B = \frac{1}{2} h_b = N_3K$.

Аналогично строится вторая высота треугольника; для построения третьей высоты используется точка пересечения двух построенных высот.

9. Разделить данный отрезок на три равные части, не пользуясь построением параллельных прямых.

Решение этой задачи основано на свойстве одной из замечательных точек треугольника, точки пересечения медиан треугольника.

Пусть в треугольнике ABC (рис. 201) проведены две его медианы m_a и m_b и пусть точка их пересечения O. Продолжим AA_1 за точку A_1 на расстояние $A_1O_1 = OA_1$, и соединим O_1 с B и C и точку O с C; в четырехугольнике OBO_1C диагонали делятся взаимно пополам: $OA_1 = A_1O_1$ по построению и $CA_1 = A_1B$ по данному; следовательно, $CO_1 \parallel\!= BO$ и $BO_1 \parallel\!= CO$. B_1O — средняя линия треугольника ACO_1, а потому $B_1O = \frac{1}{2}CO_1 = \frac{1}{2}OB$ и $B_1O = \frac{1}{3}BB_1$; $AO = OO_1$, а потому $OA_1 = A_1O_1 = \frac{1}{2}OO_1 = \frac{1}{2}AO$ и $OA_1 = \frac{1}{3}AA_1$; OC_1 — средняя линия треугольника AO_1B, а потому C_1 — середина AB и CC_1 — медиана; кроме того $OC_1 = \frac{1}{2}O_1B = \frac{1}{2}OC$ и $OC_1 = \frac{1}{3}CC_1$. Итак:

медианы треугольника пересекаются в одной точке и отсекают друг от друга одну треть, считая от стороны треугольника.

Пользуясь указанным свойством медиан, можно решить данную задачу.

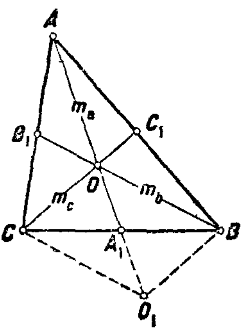


Рис. 201.

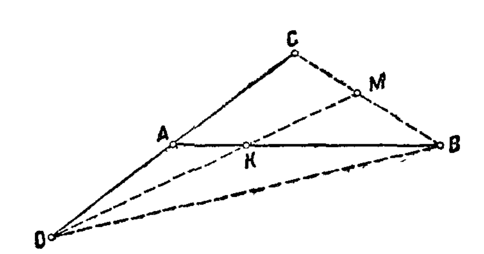


Рис. 201а.

Пусть AB — данный отрезок (рис. 201а). Проводим через один из его концов, например точку A, прямую CD, образующую с отрезком AB произвольный угол, и отложим по обе стороны от точки A на прямой CD равные отрезки произвольной длины, положим $AC = AD$. Соединив точки C и D с точкой B, получим треугольник BCD, в котором отрезок BA — медиана. Проводим еще другую медиану DM треугольника BCD; она отсечет от отрезка AB отрезок $AK = \frac{1}{3}AB$; разделив обычным способом отрезок KB пополам или отложив от точки K отрезок $KN = AK$, получим искомое решение.

Нужно объяснить, что обе разобранные задачи представляют собою задачи „с препятствием“: в первой — одна вершина недоступна, во второй — ограничен выбор приемов для выполнения построения, так как в условии указано, что нельзя пользоваться проведением параллельных прямых.

В разобранных задачах на построение мы пользовались методом геометрических мест, методом вспомогательной фигуры, методом параллельного перенесения.

Задачи на построение, расположенные по методам их решения, собраны в книге И. Александрова „Геометрические задачи на построение и методы их решения" (посмертное издание под редакцией и с дополнениями С. Ю. Калецкого, Учгиз, 1934). В этой книге преподаватель найдет весьма ценные для себя указания и разбор методов решения задач.

§ 13. Окружность и круг. Измерение углов. Метод геометрических мест.

Окружность — геометрическое место.

1. Второй основной фигурой элементарного курса геометрии является круг и контур его — окружность. Окружность — единственная из кривых линий, рассматриваемая в элементарном курсе геометрии.

Окружность — замкнутая кривая линия на плоскости, все точки которой обладают одним определенным свойством: они отстоят от данной точки — центра окружности — на данное расстояние, и никакие точки на этой плоскости, не лежащие на окружности, этим свойством не обладают.

Прямая или кривая линия на плоскости, все точки которой обладают одним определенным свойством при условии, что никакие другие точки, не принадлежащие этой линии, этим свойством не обладают, называется геометрическим местом этих точек.

В этом смысле *окружность есть геометрическое место точек на плоскости, отстоящих от данной точки, центра, на данное расстояние (радиус).* Всякая точка, лежащая внутри окружности, — ближе к центру, а всякая точка вне окружности — дальше от центра.

Понятие о геометрическом месте должно быть дано учащимся четко.

Расстояние от точки до окружности.

2. Необходимо рассмотреть окружность в различных ее сочетаниях с точкой, прямой и другой окружностью.

Если взять окружность и точку вне ее, то возникает вопрос, что называется расстоянием от точки до окружности.

Известно, что, говоря о расстоянии между двумя точками, имеют в виду кратчайшее расстояние между иимн, а именно — длину отрезка прямой, концами которого служат две данные точки; точно так же под расстоянием от точки до прямой подразумевается кратчайшее расстояние от точки до прямой, т. е. длина отрезка, концами которого служат данная точка и ее проекция на прямую, и под расстоянием между двумя параллельными прямыми имеют ввиду кратчайшее расстояние между ними.

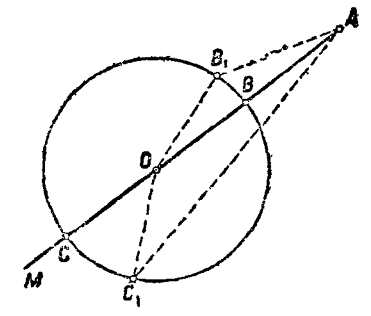


Рис. 202.

Чтобы ответить на поставленный выше вопрос, следует предварительно дать понятие о секущей и центральной секущей и доказать, что *кратчайшее расстояние от точки A до окружности есть длина отрезка AB централь-*

ной секущей AM, концами которого служат данная точка A и точка B пересечения секущей AM с окружностью, лежащая по одну сторону от центра O окружности с данной точкой A (рис. 202). *Длина отрезка AC секущей AM, концами которого служат данная точка A и точка C пересечения центральной секущей AM с окружностью, лежащая с данной точкой A по разные стороны от центра O, есть наибольшее расстояние от точки A до окружности.*

1) Следует доказать, что отрезок AB — наименьшее расстояние от точки A до окружности O.

Пусть B_1 — произвольная точка окружности, не лежащая на центральной секущей. Докажем, что $AB_1 > AB$. Соединив точку A с точкой B_1 и точку B_1 с точкой O, получим из треугольника OAB_1, что

$$AB_1 + OB_1 > OA \quad \text{или} \quad AB_1 + OB_1 > OB + AB.$$

Отнимая от обеих частей неравенства по равному отрезку OB_1 и OB, равным радиусу окружности, находим, что $AB_1 > AB$.

Итак, AB короче любого другого расстояния между точкой A и произвольной точкой окружности.

2) Докажем, что AC — наибольшее расстояние от точки A до окружности. Пусть C_1 — какая-нибудь точка окружности. Соединив ее с точкой A и центром O, находим из треугольника AOC_1, что

$$AC_1 < AO + OC_1,$$

или, заменив OC_1 равным отрезком OC, так как OC_1 и OC — радиусы, получим, что

$$AC_1 < AO + OC, \quad \text{или} \quad AC_1 < AC.$$

Итак, AC — наибольшее расстояние от точки A до окружности.

Следует рассмотреть также случай, когда точка A лежит внутри окружности.

Пусть точка A лежит внутри окружности и MN — центральная секущая, проходящая через точку A (рис. 203).

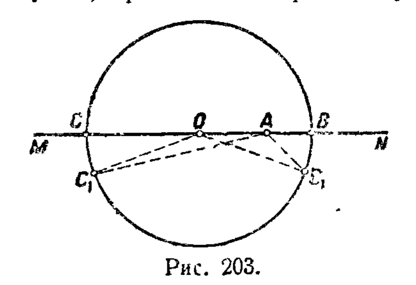


Рис. 203.

1) Возьмем произвольную точку B_1, не лежащую на центральной секущей MN, и соединим ее с точкой A, тогда $AB_1 > AB$. В самом деле, соединив центр O с точкой B_1, находим из треугольника OAB, что $AB_1 > OB_1 - OA$, или, заменив OB равным радиусом OB, получим:

$$AB_1 > OB - OA, \quad \text{или} \quad AB_1 > AB.$$

2) Докажем еще, что AC — наибольшее расстояние от точки A до окружности.

Возьмем произвольную точку C_1 и, соединив ее с точкой A, докажем, что $AC_1 < AC$. Соединив точку C_1 с точками O и A, находим из треугольника OAC_1, что $AC_1 < AO + OC_1$. Заменив OC_1 равным радиусом OC, получаем: $AC_1 < AO + OC$, или $AC_1 < AC$.

Итак, расстоянием от точки A до окружности мы будем считать кратчайшее расстояние от точки A до окружности, т. е. длину отрезка AB, концами которого служат данная точка A и та точка пере-

сечения с окружностью центральной секущей, проходящей через точку A, которая лежит с данной точкой по одну сторону от центра.

Если данная точка A лежит на окружности, то очевидно, что кратчайшее расстояние ее до окружности равно нулю, а наибольшее расстояние равно диаметру.

Для закрепления рассмотренных теорем может быть дана следующая задача:

Наименьшее расстояние от точки A до окружности равно 5 *см*, наибольшее равно 15 *см*. Найти диаметр окружности.

В условии не сказано точно, будет ли данная точка внешней или внутренней по отношению к окружности. Поэтому следует рассмотреть два случая.

1) A — внешняя точка (рис. 202). Обозначим диаметр через D, тогда $AB = 5$ и $AC = 15$.

Но $AC = D + 5$, а потому $15 = D + 5$ и $D = 10$.

2) A — внутренняя точка (рис. 203), $AB = 5$ и $AC = 15$; тогда $AB + AC = D = 5 + 15 = 20$.

Итак, диаметр искомой окружности равен или 10 *см* или 20 *см*, т. е. для внутренней точки он равен сумме наибольшего и наименьшего расстояний точки до окружности, а для внешней точки — их разности.

Обычно в учебниках геометрии не уделяется должного внимания вопросу о кратчайшем расстоянии от точки до окружности, а между тем еще Евклид в своей третьей книге „Начал" решает аналогичный вопрос. В большинстве случаев учащиеся не довольствуются одним только определением, что называется кратчайшим расстоянием от точки до окружности, требуют соответствующего доказательства; оно должно быть дано, тем более что само доказательство указанного положения чрезвычайно просто.

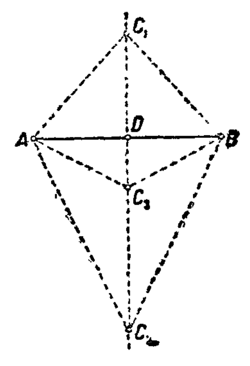


Рис. 204.

Геометрические места.

3. Вопрос о геометрических местах, играющий весьма существенную роль, особенно при решении задач на построение, следует подробно рассмотреть с учащимися. Надо так ставить вопрос, чтобы учащиеся интуитивно сами могли подойти к решению вопроса о том или ином геометрическом месте точек, а затем и сумели доказать справедливость сделанного ими предположения. Так, вопрос о геометрическом месте точек, удаленных на одинаковое расстояние от двух данных точек A и B (рис. 204), можно рассмотреть в следующем порядке: пусть C_1 — какая-либо точка, для которой $C_1A = C_1B$; соединив точки A, B и C_1 прямыми, учащиеся заключают, что треугольник AC_1B — равнобедренный. Если взять еще одну точку C_2 так, что $C_2A = C_2B$, то снова получится равнобедренный треугольник AC_2B; наконец, если взять еще одну точку C_3 так, что $C_3A = C_3B$, то снова получится равнобедренный треугольник AC_3B и т. д. Возникает вопрос, как расположены точки C_1, C_2, C_3... Может случиться, что учащиеся сразу ответят, что точки C_1, C_2, C_3... лежат на одной прямой. Если

же не последует такого ответа, то нужно провести из точек C_1, C_2, C_3 перпендикуляры к отрезку AB; каждый из перпендикуляров: C_1D, C_2D, C_3D проходит через середину AB, а потому они лежат на одной прямой, так как через точку D можно провести к AB только один перпендикуляр. После такого разбора доказывается теорема: **медиатриса отрезка есть геометрическое место точек, удаленных от двух данных точек A и B или от концов данного отрезка на одинаковое расстояние.**

4. Таким же методом следует подойти к рассмотрению и второго геометрического места точек, удаленных от сторон данного угла на одинаковое расстояние.

Оба геометрических места — медиатриса отрезка и биссектриса угла — оси симметрии.

Необходимо указать, что геометрическим местом точек, удаленных на одинаковое расстояние от двух пересекающихся прямых, является совокупность двух взаимно перпендикулярных биссектрис углов, образованных при пересечении прямых.

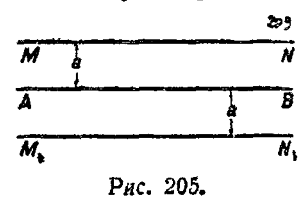


Рис. 205.

Совокупность двух прямых MN и M_1N_1, параллельных данной прямой AB и отстоящих от нее на данное расстояние a (рис. 205), ***есть геометрическое место точек, удаленных на данное расстояние a от данной прямой AB.***

Этот последний случай есть случай предельный для геометрического места, рассмотренного выше (биссектриса). При указанном условии прямая AB — ось симметрии для параллельных MN и M_1N_1.

Касательная.

5. Мы не будем останавливаться на свойствах диаметра, перпендикулярного к хорде, и вытекающих отсюда задачах и теоремах. Вопрос достаточно подробно изложен в стабильном учебнике. Следует только подчеркнуть, что касательную надо рассматривать как предельное положение секущей, две точки пересечения которой с окружностью слились в одну.

Рассмотрение вопроса о касательных можно предварить следующим опытом. Начертив на доске окружность и отметив вне ее некоторую точку M, укрепляем в ней конец M нитки MN (рис. 206). Если натянуть нить MN, то прямая MN, изображенная нитью, пересечет окружность в двух точках, A и B. Если вращать нить в натянутом положении по направлению, указанному стрелкой (или в противоположном направлении), то дуга AB постепенно уменьшается и точки A и B приближаются друг к другу; наконец, наступает момент, когда точки A и B совпадут, и тогда секущая MN имеет с окружностью только одну общую точку, вернее — две совпавшие точки, и является уже касательной. При вращении нити около точки M в противоположном направлении учащиеся убеждаются, что может быть два положения, при которых секущая имеет с окружностью две слившиеся точки. Таким показом учащихся подводят к правильному определению касательной.

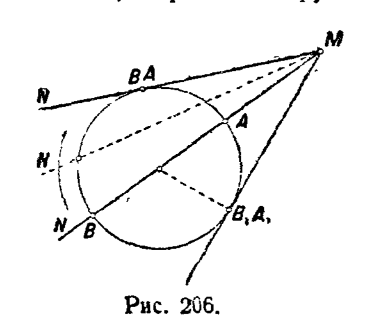


Рис. 206.

Необходимо рассмотреть три возможных случая положения прямой относительно окружности.

Знание свойств касательных позволяет решить вопрос о построении касательных.

Ставится вопрос: провести касательную к данной окружности через данную точку. Следует рассмотреть три возможных случая: данная точка лежит 1) на окружности, и тогда можно провести только одну касательную, 2) вне окружности, и тогда можно провести две касательные, 3) внутри окружности, в этом случае нельзя провести ни одной касательной.

Решение задачи на построение к окружности касательной, параллельной данной прямой, позволяет перейти к теореме: **касательная, параллельная хорде, делит дугу, стягиваемую хордой, в точке касания пополам.**

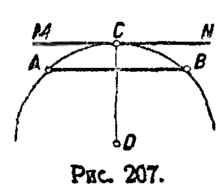


Рис. 207.

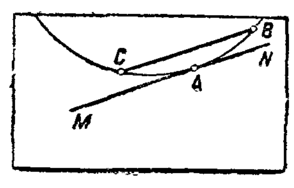


Рис. 208.

В самом деле, пусть MN — касательная и $MN \parallel AB$ (рис. 207); соединив точку C касания с центром O, имеем $OC \perp MN$; в таком случае и $OC \perp AB$ и, следовательно, OC делит дугу $\smile ACB$ пополам. С данной теоремой следует связать задачу:

Через точку A, данную на дуге окружности, провести касательную, если центр дуги не дан или находится вне чертежа.

Эта задача — задача „с препятствием". Приняв точку A за центр, засекаем произвольным радиусом по обе стороны от нее равные дуги, AB и AC (рис. 208), проводим хорду BC и через точку A — прямую $MN \parallel BC$, тогда MN — искомая касательная, так как в точке A дуга BAC делится пополам.

Эта задача имеет большое практическое значение при черчении.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Сколько окружностей можно провести через данные три различные точки?

2. Диаметр круга на 5 *см* больше радиуса. Чему равен диаметр?

3. Из данной точки окружности проведены две равные хорды. Каждая из них равна радиусу. Найти угол между хордами.

В нижеследующих четырех вопросах учащиеся *должны закончить фразу, указав, какая линия или* какие линии являются искомыми.

4. Геометрическое место середин равных хорд данной окружности есть . . . .

5. Геометрическое место центров окружностей данного радиуса r, касающихся данной прямой, есть . . . .

6. Геометрическое место центров окружностей, касающихся двух пересекающихся прямых, есть . . . .

7. Геометрическое место середин параллельных хорд данной окружности есть . . . .

8. Из точки M, данной вне окружности, про-

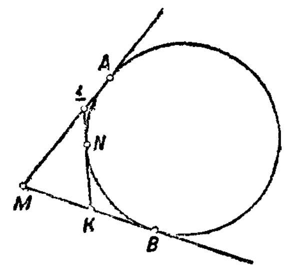


Рис. 209.

ведены к ней две взаимно перпендикулярные касательные. Расстояние от точки M до центра равно m. Чему равно расстояние между точками касания?

9. Из внешней точки M проведены к кругу две касательные — MA и MB, длиною в a (рис. 209). Через точку N меньшей дуги AB проведена касательная KL. Найти периметр треугольника KLM.

10. По контуру равностороннего треугольника, каждая сторона которого равна 3 *см*, катится без скольжения круг, окружность которого тоже равна 3 *см*. Сколько раз обернется круг, когда, обойдя один раз контур треугольника, он вернется в исходное свое положение?

Кроме приведенных вопросов учащимся могут быть предложены вопросы, требующие более глубокого анализа и более сложных вычислений.

11. Данный треугольник ABC перенести на плоскости так, чтобы две его вершины, например A и B, лежали на данной окружности, а третья — на данной прямой MN, причем $AB \leq 2r$.

12. Даны две окружности; найти точку, чтобы касательные, проведенные из нее к этим окружностям, имели данную длину a и b.

13. Построить окружность радиуса r так, чтобы центр ее лежал на одной из данных прямых, а при пересечении с другой данной прямой получалась бы хорда данной длины.

Последние три задачи являются уже некоторой подготовкой к более сложным задачам на построение.

Указания к контрольным вопросам.

1. Следует различать два случая: или 1) все три точки лежат на одной прямой, или 2) все три точки не лежат на одной прямой.

2. Вопрос ставит своей задачей проследить находчивость учащегося; он должен дать быстрый ответ: диаметр равен 10 *см*.

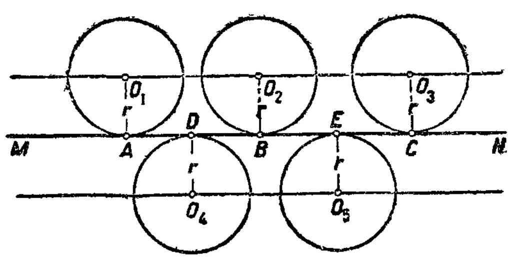


Рис. 210.

3. Чертеж позволяет дать быстрый ответ. На самом деле, если соединить центр с концами хорд, то получаются два равносторонних треугольника, а потому угол между хордами равен $60° + 60° = 120°$.

4. Концентрическая окружность, радиус которой равен расстоянию хорд от центра.

К решению этой задачи следует учащихся подвести постепенно. Вычерчивается окружность данного радиуса и проводятся 2—3 хорды одинаковой длины. Затем следует разделить каждую хорду пополам и соединить их середины с центром. Отрезки, соединяющие середины хорд с центром окружности, 1) перпендикулярны к хордам и 2) равны; следовательно, середины хорд одинаково удалены от центра и лежат на окружности, концентрической с данной, и радиус этой концентрической окружности равен расстоянию хорд от центра.

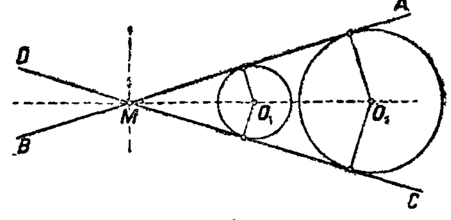


Рис. 211.

5. Две прямые, параллельные данной и отстоящие от нее на расстояние, равное r.

И к данному вопросу следует учащихся подвести постепенно. Следует построить две-три окружности данного радиуса r, касающиеся данной прямой MN (рис. 210); для этого проводят два-три перпендикуляра к MN и на них откладывают от прямой отрезки $AO_1 = BO_2 = CO_3$ и проводят окружности с центрами в O_1, O_2 и O_3 радиусом, равным r. Затем на вопрос, где лежат точки O_1 O_2, O_3, должен последовать ответ: на прямой, параллельной прямой MN. Следует доказать, что точки O_1, O_2, O_3 лежат на одной прямой; для этого нужно

соединить точки O_1 и O_2, и тогда $O_1O_2 \parallel MN$, точно так же $O_2O_3 \parallel MN$; но так как через точку O_2 можно провести только одну прямую, параллельную MN, то все три точки лежат на одной прямой $O_1O_3 \parallel MN$. Необходимо обратить внимание учащихся и на то, что по другую сторону прямой MN имеется еще прямая $O_4O_5 \parallel MN$, и, таким образом, геометрическим местом центров окружностей являются две прямые, параллельные данной прямой.

6. Две взаимно перпендикулярные биссектрисы углов, образуемых данными двумя прямыми.

Для проведения анализа задачи следует сперва вычертить две пересекающиеся прямые и две-три окружности, касающиеся данных прямых (рис. 211). Линия центров этих окружностей и общие внешние касательные к ним пересекаются в одной точке; линия центров построенных окружностей — ось симметрии этих окружностей, следовательно она является биссектрисой угла между общими внешними касательными окружностей.

К этому выводу можно притти и другим путем: если провести в точки касания радиусы, то точки O_1 и O_2 находятся соответственно на одинаковом расстоянии от сторон угла, а потому прямая O_1O_2 — биссектриса. То же имеет место для угла, смежного с данным. Таким образом, геометрическим местом будут две взаимно перпендикулярные биссектрисы углов, образуемых при пересечении двух прямых.

7. Диаметр данной окружности, перпендикулярный к одной из них параллельных хорд.

8. Следует воспользоваться основным свойством радиусов, проведенных в точку прикосновения касательных: они составляют с касательными прямые углы. Проведя радиусы в точки касания касательных, получим квадрат; диагонали квадрата равны, а потому расстояние m от центра до внешней точки M равно и расстоянию между точками касания.

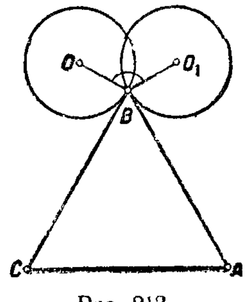


Рис. 212.

9. Решение задачи основано на том, что касательные, проведенные из одной точки к данной окружности, равны. Периметр треугольника KLM равен $KM + ML + LN + NK$, но $KM + KN = KM + KB = a$ и $ML + LN = ML + LA = a$, а потому периметр треугольника KLM равен $2a$.

10. Данный вопрос имеет занимательный характер. Когда круг катится по стороне, то он обернется только один раз, ибо длина стороны и длина окружности согласно условию равны. Но когда круг коснется стороны в конце ее, в вершине треугольника, то круг должен повернуться у вершины на угол, равный 120° (рис. 212), ибо угол OBO_1 и угол ABC — пополнительные как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Это будет иметь место у каждой вершины, и, следовательно, круг повернется, обойдя весь контур треугольника, еще один раз, а всего 4 раза.

На последних трех задачах остановимся несколько подробнее; приемы, которыми мы будем пользоваться при их решении, могут быть использованы при решении и других задач подобного рода.

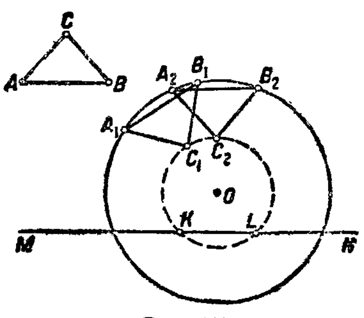


Рис. 213.

11. Пусть дан треугольник ABC, окружность O и прямая MN (рис. 213).

Надо указать учащимся пути проведения анализа задачи. Обычно опускают одно из условий задачи, и задача тогда становится неопределенной. Так, опустив условие, что вершина C должна лежать на данной прямой, имеем задачу: построить треугольник, две вершины A и B которого лежат на данной окружности.

Допустим, что в данной окружности O проведена хорда $A_1B_1 = AB$ и на ней построен треугольник $A_1B_1C_1$, равный данному треугольнику ABC. Однако можно построить бесчисленное множество хорд данной длины AB в окружности, значит можно построить и бесчисленное множество треугольников, две вершины которых лежат на данной окружности. Задача неопределенная.

После этого принимается во внимание условие, что вершина C_1 должна лежать на данной прямой MN. Но вершина C_1 может лежать на окружности с центром в точке O на расстоянии, равном OC_1 от точки O, т. е. на окружности, концентрической данной. Проводим эту окружность; могут получиться три случая: 1) окружность пересекает прямую MN в двух точках, и тогда получатся два треугольника; 2) окружность касается данной прямой, и тогда получается одно решение, и, наконец, 3) окружность не пересекает прямой MN и не касается ее, и тогда нет ни одного решения.

Точки K и L (рис. 213) соответствуют вершине C данного треугольника ABC. Приняв эти точки за центры окружностей, засекаем данную окружность дугами,

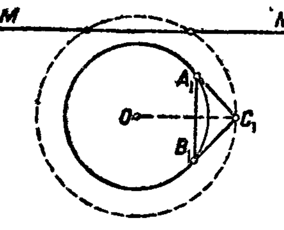


Рис. 214.

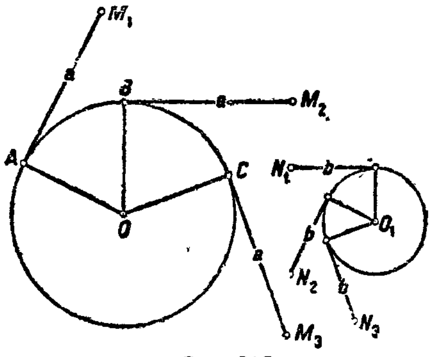


Рис. 215.

радиусы которых равны сторонам CA и CB данного треугольника. Если затем соединить точки пересечения дуг с данной окружностью соответственно с точками K и L, то получим два треугольника с вершиной в точке K и два треугольника с вершиной в точке L. Следует иметь в виду, что вершина C треугольника ABC может лежать и вне окружности; в этом случае вершины треугольников также лежат на окружности, концентрической с данной (рис. 214).

То же самое имеет место, если данная прямая лежит вне данной окружности (рис. 214).

12. Пусть построена касательная длиною a к первой окружности (рис. 215); второе условие пока опускаем. Если построить к первой окружности несколько касательных длиною a и соединить концы их M_1, M_2, $M_3, \ldots$ с центром O окружности, то $\triangle M_1AO = \triangle M_2BO = \triangle M_3CO = \ldots$, а потому $OM_1 = OM_2 = OM_3 = \ldots$ и, следовательно, точки $M_1, M_2, M_3, \ldots$ лежат на концентрической окружности радиуса, равного $OM_1 = OM_2 = OM_3 = \ldots$

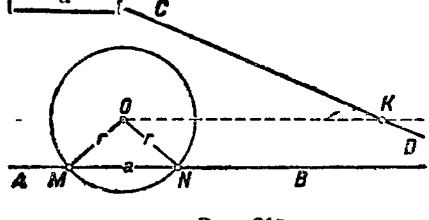


Рис. 216.

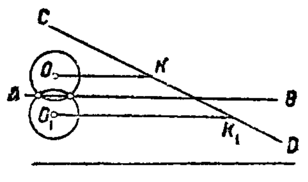


Рис. 217.

То же самое имело бы место, если бы опустить первое условие и оставить только второе условие. В последнем случае все точки, из которых можно провести ко второй окружности касательные длиною b, лежали бы на окружности с центром в точке O_1 радиуса O_1N_1. Следовательно, точки, из которых можно провести к обеим окружностям касательные длиною a и b, должны принадлежать обеим концентрическим окружностям, т. е. это будут точки их пересечения. Это или две точки, если вспомогательные концентрические окружности пересекаются, или одна — в случае касания окружностей, или ни одной, когда окружности не имеют общей точки.

13. Допустим, что даны две прямые AB и CD (рис. 216), радиус r искомой окружности и отрезок a, который окружность отсекает на прямой AB ($a \leqq 2r$).

Отложим на прямой AB в произвольной точке M отрезок $MN = a$ и строим затем равнобедренный треугольник со сторонами a, r и r. Вершина O этого

треугольника — центр искомой окружности. Первое условие, указывающее, что центр должен лежать на прямой CD, пока опущено. Перемещая центр O параллельно прямой AB, получим бесчисленное множество окружностей, отсекающих от прямой AB хорду данной длины a и лишь тогда, когда точка O, перемещаясь параллельно прямой AB, окажется на прямой CD в некоторой точке K, эта точка и будет искомым центром. На рисунке 216 центр O окружности расположен над прямой AB; можно построить вторую окружность, которая отсекала бы на прямой AB хорду a так, что центр окружности будет лежать по другую сторону прямой AB, как это показано на рисунке 217. Перемещая центры O и O_1 обеих окружностей по прямым, параллельным прямой AB, получим два решения, две точки K и K_1 пересечения прямых, параллельных прямой AB, с прямой CD; эти точки K и K_1 являются центрами искомых окружностей; таким образом, задача имеет два решения.

В том случае, когда прямая $CD \parallel AB$, нет ни одного решения, если только прямая CD не проходит при этом через точку O, так как в этом случае задача допускает бесчисленное множество решений: любая окружность с центром на прямой CD будет искомой; если же $a = 2r$, то центр должен лежать на AB, и искомая окружность будет иметь своим центром точку пересечения прямых AB и CD; если же при этом $CD \parallel AB$, то нет ни одного решения.

Можно предложить учащимся решить по указанному методу задачу: **построить круг данного радиуса, окружность которого отсекала бы от сторон данного угла хорды данной длины.**

Задачи с препятствиями.

6. Приводим разбор трех задач с препятствиями.

Задачи. 1. Провести касательную через данную точку дуги, центр которой недоступен.

Предположим, что точка A (рис. 218) так близко лежит около конца дуги, что невозможно по обе стороны от этой точки A отложить равные дуги. Выбираем вспомогательную точку A_1, удобную для проведения через нее касательной. Соединив затем точки A и A_1 хордой, строим ее медиатрису CC_1, которая пересечет касательную A_1C в точке C. Соединив точку C с точкой A, получим искомую касательную AC. Это построение основано на свойстве касательных, проведенных из одной точки к окружности.

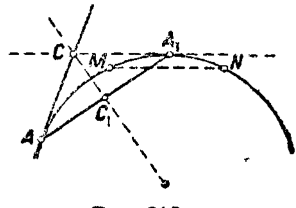


Рис. 218.

2. Даны три точки, A, B и C, лежащие на некоторой определенной окружности; сама окружность не дана и не должна быть построена. Провести касательную к окружности через одну из данных точек, положим, через точку C.

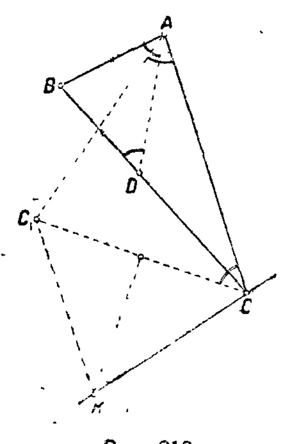


Рис. 219.

Отложим на прямой BC отрезок $BD = BA$ (рис. 219) и строим на прямой AC, как показано на рисунке при точках A и C по углу, равному $\angle BAD$ или $\angle BDA$; AC их общая сторона и точка C_1 принадлежит окружности, проходящей через точки A, B и C, ибо $\angle B = \angle C_1$, так как равнобедренные треугольники ABD и AC_1C имеют равные углы при их основаниях, следовательно равны и углы при вершинах, а по-

тому оба угла, B и C_1, опираются на одну и ту же хорду AC. Прямая C_1K, параллельная AC, — касательная к окружности, ибо делит дугу, стягиваемую хордой AC, пополам, так как хорды AC_1 и CC_1 равны. Медиатриса отрезка CC_1 пересечет касательную C_1K в точке K; соединив K с C, получим искомую касательную KC к окружности, проходящей через точки A, B и C. Последний вопрос следует рассмотреть с учащимися после ознакомления их с измерением углов в круге.

3. Дана окружность O и две непараллельные прямые, AB и CD, пересекающиеся вне плоскости чертежа. Требуется из недоступной точки M их пересечения провести касательные к данной окружности.

Построим, прежде всего, прямую OM, которая должна пройти через данную точку O и недоступную точку M (рис. 220). Выполнить такое построение мы уже умеем. Затем находим известным нам построением точку N — середину расстояния от недоступной точки M до центра. Окружность с центром в точке N и радиуса, равного NO, дает две точки касания T_1 и T_2. Соединив эти точки с точкой M, получаем искомые касательные, так как T_2N — медиана треугольника OT_2M и T_1N — медиана треугольника OT_1M; каждая из них равна половине отрезка OM, а потому треугольники OT_2M и OT_1M — прямоугольные.

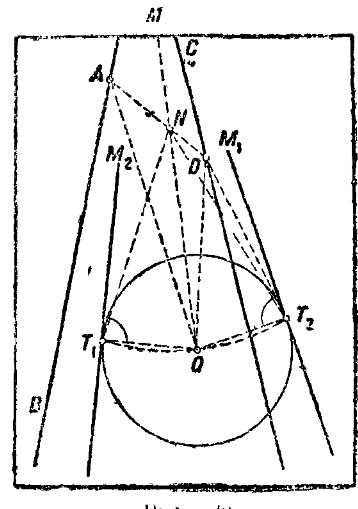


Рис. 220.

Итак, проведя $T_2M_1 \perp OT_2$ и $T_1M_2 \perp OT_1$, находим искомые касательные.

Считаем необходимым отметить, что нами указаны далеко не все те задачи, которые можно было бы в данной теме рассмотреть с учащимися. Методы вращения, перемещения, симметрии дают возможность решить большое число задач с препятствиями. Об этих методах речь будет впереди. Рассмотренные задачи основаны на весьма простых и несложных зависимостях между элементами фигур и вполне доступны учащимся.

Измерение углов. Задачи.

7. Тему „Измерение углов“ следует начать с указания, что центральный угол измеряется соответствующей ему дугой окружности, заключенной между его сторонами, и что, таким образом, число угловых градусов угла и число дуговых градусов дуги равны. Вопроса о соизмеримых и несоизмеримых углах или дугах можно и не касаться; рассмотрение последнего вопроса отнимает у учащихся много времени, нисколько существенно не содействуя расширению их кругозора.

Следует придерживаться порядка изложения темы, данного в стабильном учебнике.

Свойство равенства вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу, может быть демонстрировано на следующем приборе, который может быть изготовлен силами самих учащихся.

Берут фанерную доску (рис 221) и вбивают в нее на некотором расстоянии друг от друга два гвоздя M и N так, чтобы их головки *торчали над доской примерно на 0,5 см. Кроме того вырезают из картона* или фанеры угол $B_2A_2C_2$, вершиной которого служит отверстие A_2, в которое можно вставить острие карандаша. Такой угол накладывают на доску так, чтобы его стороны A_2B_2 и A_2C_2 касались гвоздиков M и N.

Если затем вставить в отверстие A_2 острие карандаша и двигать им по доске так, чтобы обе стороны угла все время проходили через точки M и N, касаясь оснований гвоздиков M и N, то карандаш опишет дугу окружности, проходящей через точки A_2, M и N, и $\angle A_2$ есть вписанный угол, опирающийся на хорду MN. Понятно, что величина вписанного угла A_2 не меняется, *также не меняется и длина хорды MN* и стягиваемая ею дуга. Таким показом подтверждается, что вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, р а в н ы. Прибор может быть использован вместо циркуля для построения дуги окружности. Для демонстрации желательно иметь модели углов — острого, прямого и тупого. Дуга, описываемая острием карандаша, при остром угле больше полуокружности, и

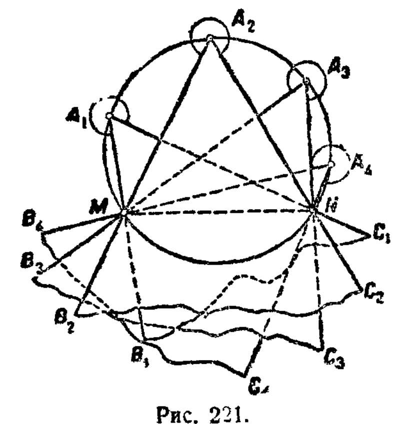


Рис. 221.

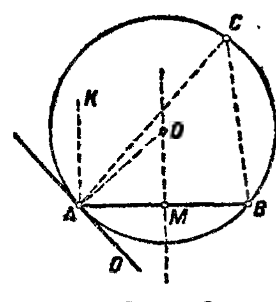


Рис. 222

центр ее, как и точка A, лежит по одну сторону хорды MN; в случае прямого угла хорда MN служит диаметром дуги окружности, и центр лежит на MN; в случае тупого угла описываемая дуга меньше полуокружности, и центр ее и точка A лежат по разные стороны хорды MN.

Решается задача на построение:

Построить на данной хорде $AB = a$ сегмент, вмещающий данный угол α (рис. 222).

А н а л и з задачи показывает, что решение сводится к построению прямоугольного треугольника AMO по катету $AM = \frac{a}{2}$ и противолежащему острому углу $AOM = \alpha$, ибо центр окружности, которой принадлежит сегмент ACB, должен лежать: 1) на медиатрисе MO хорды AB и 2) на прямой AO или BO, образующей с перпендикуляром AK к хорде AB угол KAO, равный α, $KA \parallel OM$ и $\angle KAO = \angle AOM$. Можно итти и путем, указанным в стабильном учебнике, где анализ ведется так: проводят через точку A прямую $AD \perp AO$, и тогда AD — касательная и $\angle DAB = \angle ACB = \alpha$.

Построение проводится в следующем порядке. Строится: 1) медиатриса MO отрезка AB; 2) $AK \perp AB$; 3) $\angle KAO = \alpha$, и тогда точка пересечения AO и MO даст искомый центр O и отрезок OA — радиус искомой окружности, или же строится: 1) медиатриса отрезка AB, 2) угол $BAD = \alpha$; 3) $AO \perp AD$, и тогда точка пересечения O отрезков AO и MO — искомый центр окружности, радиус которой AO.

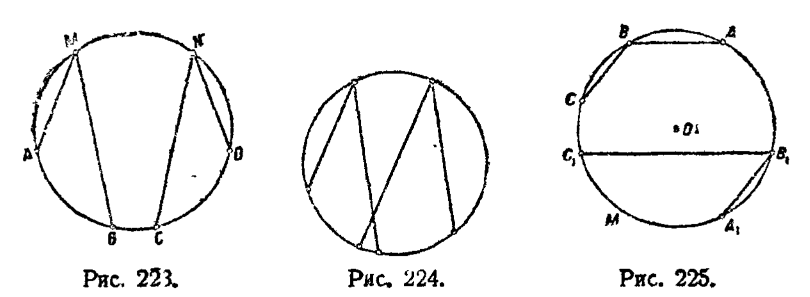


Рис. 223. Рис. 224. Рис. 225.

Первое построение основано на положении, что вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла, второе — на том, что вписанный угол и угол, образованный касательной и хордой, проведенными из одной точки, равны, если равны дуги, заключенные между их сторонами.

При рассмотрении вписанных углов следует показать учащимся, что вписанные углы одной и той же окружности равны не только тогда, когда стороны их проходят через концы одной и той же дуги, но и тогда, когда дуги, заключенные между их сторонами, равны. Так, $\angle AMB = \angle CND$, если $\smile AB = \smile CD$ (рис 223). Без такого указания учащиеся нередко не обратят внимания на равенство углов в окружности и будут всегда полагать, что вписанные углы только тогда равны, если они „опираются" на одну и ту же дугу. Необходимо показать учащимся, что вписанные углы, стороны которых попарно параллельны, или равны, если они оба острые или оба тупые (рис. 224), или пополнительные, если один из них острый, а другой тупой (рис. 225). Справедливость этого вытекает из теоремы об углах с попарно параллельными сторонами.

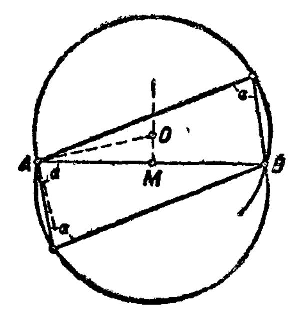


Рис. 226.

Следует заметить, что сегмент, вмещающий данный угол α, можно построить и по другую сторону отрезка AB (рис. 226), и тогда дуга сегмента при $\alpha < 90°$ больше полуокружности. В случае, если $\alpha = 90°$, каждый из сегментов равняется полукругу, и AB — диаметр (рис. 227). В случае, если $\alpha > 90°$, каждый из получаемых сегментов меньше полукруга (рис. 228).

При $\alpha < 90°$ вершины вписанных углов, равных α, и центр дуги сегмента лежат по одну сторону от хорды; при $\alpha = 90°$ центр дуги сегмента лежит на хорде AB (хорда AB — диаметр), а при $\alpha > 90°$ вершины вписанных углов и центр дуги сегмента лежат по разные стороны от хорды AB. Итак:

1) Геометрическое место вершин углов, равных α, стороны которых проходят через две данные точки A и B, представляет собою две равные дуги с общей хордой AB, вмещающие вписанный угол α; хорда AB — ось симметрии дуг.

2) Геометрическое место вершин всех прямых углов, стороны которых проходят через данные две точки A и B, есть окружность диаметра AB.

3) Геометрическое место вершин всех тупых углов, стороны которых проходят через данные две точки A и B, представляет собою две дуги с общей хордой AB, вмещающие вписанный угол β.

Геометрическим местом вершин прямых углов можно воспользоваться для проверки чертежного треугольника.

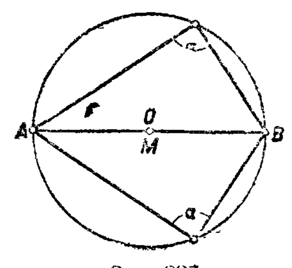


Рис. 227.

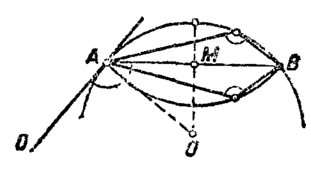


Рис. 228.

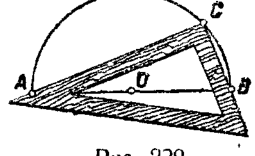


Рис. 229.

Начертив на бумаге окружность и ее диаметр AB, накладываем на рисунок чертежный треугольник так, чтобы катеты его проходили через точки A и B (рис. 229); если при этом вершина прямого угла упадет на окружность, то треугольник прямоугольный: $\angle C = 90°$.

8. Полученные выводы относительно геометрических мест приобретают исключительно важное значение при решении задач на построение; в этом учащиеся должны убедиться непосредственно сами.

Задачи. 1. По катету a и гипотенузе построить прямоугольный треугольник.

Построим на отрезке $AB = c$ как на диаметре окружность; конец отрезка A примем за центр и радиусом, равным a, засекаем хорду AC; тогда треугольник ABC — искомый.

2. Провести из внешней точки к данной окружности касательную.

Решение задачи приведено в стабильном учебнике.

3. Построить треугольник по данному основанию a, углу α при вершине A и высоте h_a.

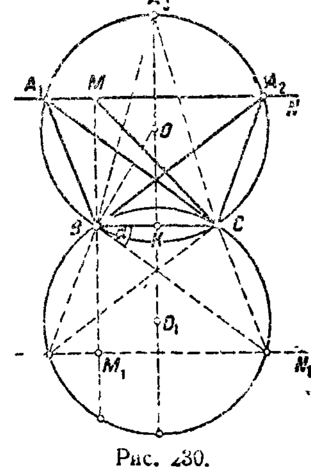


Рис. 230.

Геометрическим местом вершин A треугольников, имеющих данное основание $BC = a$ и противолежащий угол A, будут две дуги, BNC и BN_1C (рис. 230). Строим $KO \perp BC$. Отложив на $BM \perp BC$ данную высоту $h_a = BM$ или BM_1, проводим $MN \parallel BC$ или $M_1N_1 \parallel BC$; точки пересечения A_1 и A_2 будут искомыми вершинами треугольников A_1BC и A_2BC

(или — по другую сторону от BC — еще два треугольника, симметричные этим).

В самом деле, оба треугольника имеют своим основанием отрезок $BC = a$, высоту $BM = h_a$ и угол при вершине α.

Следует приучать учащихся исследовать, при каком соотношении отдельных элементов фигуры задача возможна, сколько и какие возможны решения, если элементы, данные в условии задачи, приобретают определенные предельные числовые значения или занимают в фигуре определенное положение.

Так, если прямая MN коснется окружности, то получится только один равнобедренный треугольник BA_3C, удовлетворяющий условиям задачи.

Если же высота будет больше отрезка A_3K, то задача не имеет решений.

Оба треугольника, BA_1C и BA_2C, симметричны относительно отрезка A_3K и потому равны; значит, данная задача имеет только одно решение.

4. Построить треугольник по двум его данным углам α и β, при условии, чтобы вершины его лежали на данной окружности радиуса R.

Анализ. Допустим, что треугольник ABC построен и вершины его лежат на данной окружности радиуса R (рис. 231). Соединив центр окружности с вершинами A, B и C, получим центральные углы: $\angle BOC = 2\alpha$, $\angle AOC = 2\beta$ и $\angle AOB = 2\gamma$. Сумма всех трех углов треугольника $\alpha + \beta + \gamma = 180°$; следовательно, если два из них построены, то третий дополняет их сумму до $180°$; таким образом, задача сводится к построению при центре O двух прилежащих углов, 2α и 2β.

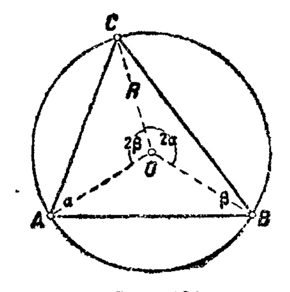


Рис. 231.

Построение. Проводим окружность данного радиуса R и ее радиус. Построив при центре два прилежащих угла, равных 2α и 2β, и соединив хордами точки пересечения сторон этих углов с окружностью, получим искомый треугольник ABC.

Доказательство. Треугольник ABC — искомый, ибо $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ и вершины A, B и C лежат на окружности радиуса R.

Исследование. Таких треугольников можно построить бесчисленное множество, все они будут равны между собою (ССС), так как равным центральным углам соответствуют и равные дуги, а следовательно — равны и хорды, стягивающие эти дуги.

5. Построить треугольник по двум его данным углам α и β при условии, чтобы стороны его касались данной окружности радиуса R.

Построив сначала треугольник с углами α и β, вершины которого лежат на данной окружности радиуса R, проводим затем к окружности касательные, параллельные сторонам построенного треугольника, и продолжаем их до взаимного пересечения. Полученный треугольник — искомый.

6. Какое геометрическое место представляют собою середины хорд данной окружности радиуса R, проходящих через данную точку A, лежащую на окружности?

Дана окружность радиуса R (рис. 232) и на ней — точка A. Проводим произвольные хорды AB, AC, AD, AE... Найдем середины хорд K, K_1, K_2..., и соединим их с центром O окружности. Тогда OK, OK_1, OK_2... перпендикулярны к соответствующим хордам, а потому $\angle OKA = \angle OK_1A = \angle OK_2A = \ldots$ и все они опираются на радиус OA, являющийся их общей гипотенузой.

Но вершины прямых углов лежат на окружности, диаметр которой $AO = R$, а потому искомое геометрическое место — окружность, диаметром которой служит радиус данной окружности, проведенный в точку A.

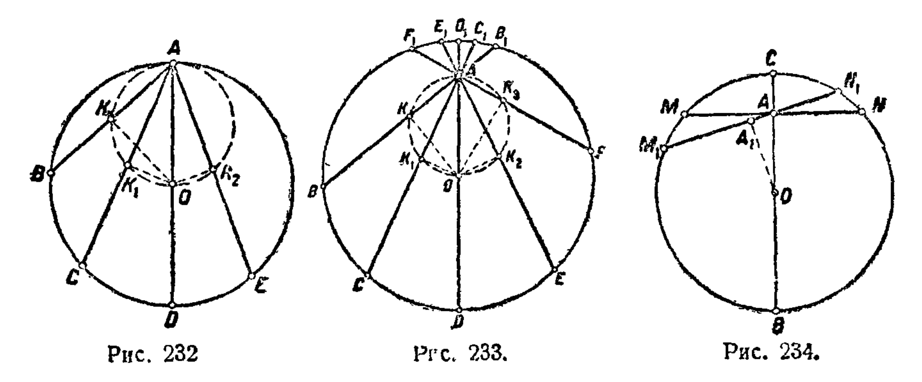


Рис. 232 Рис. 233. Рис. 234.

Если данная точка A лежит внутри окружности (рис. 233), то и в этом случае искомое геометрическое место — окружность, диаметр которой — отрезок OA, его концами служат данная точка A и центр O данной окружности.

Если, наконец, точка A лежит в центре O, то геометрическое место есть точка или, как говорят, окружность нулевого радиуса.

В качестве самостоятельной работы следует предлагать учащимся также и проведение доказательств теорем, не включенных ни в программу, ни в стабильный учебник. Предлагаемые теоремы не должны быть трудны и не должны требовать от учащихся особой изобретательности; проведение таких доказательств имеет целью испытать знания учащихся, их умение правильно записать условие и вывод теоремы и ход доказательства. Так, могут быть предложены теоремы:

7. Через точку A внутри окружности, лежащую на диаметре BC, провести хорду, делящуюся в этой точке пополам. Доказать, что это — наименьшая из всех хорд, проходящих через точку A.

Проводим через точку A две хорды, MN и M_1N_1 (рис. 234), из которых $MN \perp BC$, и докажем. что хорда $MN < M_1N_1$.

Хорда MN делится в точке A пополам. Проводим $OA_1 \perp M_1N_1$, имеем, что $OA_1 < OA$, а потому $MN < M_1N_1$, так как из двух хорд та больше, которая ближе к центру.

8. Две окружности, O и O_1, пересекаются в точках A и A_1. Через одну из этих точек, A, проведены диаметры обеих окружностей, AB и AB_1. Доказать, что точки B, A_1 и B_1 лежат на одной прямой.

Дано: O и O_1 — пересекающиеся окружности;
AB и AB_1 — диаметры окружностей.

Треб. док.: точки A, A_1 и B_1 лежат на одной прямой.

Доказательство. Проводим общую хорду AA_1 (рис. 235) и соединяем точку A_1 с B_1 и точку A_1 с B. Углы AA_1B и AA_1B_1 — прилежащие и прямые, а потому смежные, следовательно BA_1B_1 — прямая.

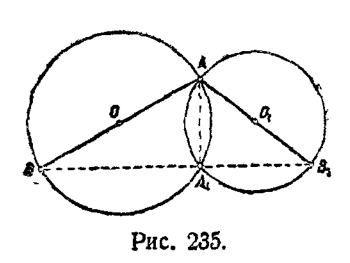


Рис. 235.

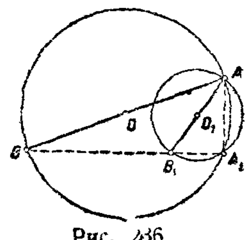


Рис. 236.

Если данные окружности O и O_1 расположены так, как указано на рисунке 236, то и в этом случае точки A_1, B_1 и B лежат на одной прямой. Действительно, $A_1B \perp AA_1$ и $A_1B_1 \perp AA_1$, и, следовательно, через точку A_1 проходят к прямой AA_1 два перпендикуляра A_1B и A_1B_1; последнее возможно лишь при условии, если перпендикуляры A_1B и A_1B_1 совпадают.

9. Диаметр спроектирован на направление касательной. Отрезок касательной, концами которого служат проекции концов диаметра, делится в точке касания пополам. Доказать (рис. 237).

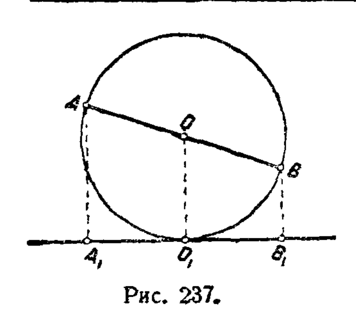


Рис. 237.

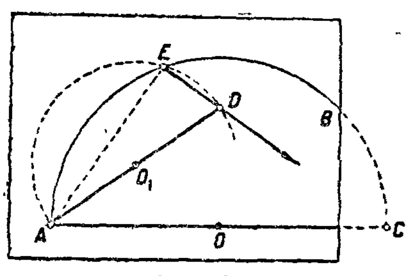


Рис. 238.

10. Найти внутри данного треугольника ABC такую точку K, чтобы прямые, проведенные из этой точки K к вершинам A, B и C данного треугольника, образовали три равных прилежащих угла.

Иная формулировка задачи:

Найти внутри данного треугольника ABC такую точку K, из которой каждая сторона видна под одним и тем же углом.

Задача эта сводится к задаче, уже разобранной в п. 7 настоящего раздела.

В самом деле, пусть ABC — данный треугольник и точка O — искомая точка. По условию $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA$, их сумма равна 360°, а потому каждый из них равен 120°. Следовательно, точка O должна лежать на дуге сегмента, опирающегося на хорду AB и вмещающего угол в 120°, она же должна лежать на дуге сегмента, опирающегося на хорду BC и вмещающего угол в 120°, а потому она должна быть точкой пересечения обеих дуг. Каждый из двух углов равен 120°, значит и третий угол равен 120°.

Полезно рассмотреть с учащимися несколько задач на построение „с препятствиями". Ниже даются некоторые из таких задач.

11. В полукруге ABC (рис. 238) конец C диаметра недоступен. Внутри полукруга дана точка D; требуется соединить ее с концом C диаметра AC.

Соединим точку D с точкой A и на отрезке AD как на диаметре построим полуокружность, пересекающую полуокружность ABC в точке E, тогда ED — искомая прямая.

В самом деле, $\angle AED = 90°$, и потому он должен опираться на диаметр AC, т. е. прямая ED при своем продолжении пройдет через недоступную вершину C.

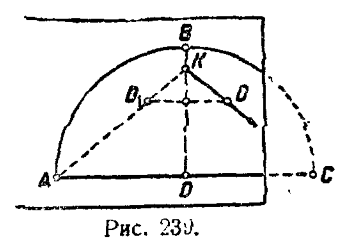


Рис. 239.

Учащиеся обычно предлагают решение, основанное на симметрии. Проводят $OB \perp AC$ и $DD_1 \perp OB$ (рис. 239); прямая AD_1 пересечет OB в некоторой точке K, и KD — искомая прямая, проходящая через точку D и недоступную вершину C.

12. В полукруге ABC оба конца, A и C, диаметра недоступны. Требуется соединить точку D, лежащую внутри полукруга, с одним из концов диаметра, например с концом C.

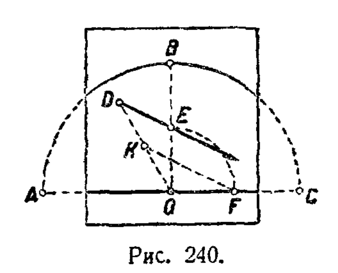


Рис. 240.

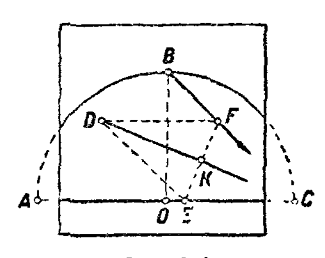


Рис. 241.

Прием, примененный в предыдущей задаче, для данного случая непригоден.

Проведя $OB \perp AC$ (рис. 240), соединим точку D с точкою O и отложим отрезок $OF = OE = \frac{1}{2} OB$, т. е. половине радиуса. Если K — середина отрезка OD, то, соединив точку K с точкой F и проведя $DC \parallel KF$, получим на основании свойства средней линии треугольника искомую

прямую DC, так как $OF=\frac{1}{2}OC$ и OF равен половине радиуса полуокружности; но $OK=KD$ и $KF \parallel DC$, а потому и $OF=FC$.

Другое решение задачи. Если соединить с концом C диаметра AC точку B медиатрисы диаметра, лежащую на полуокружности (рис. 241), то получится равнобедренный прямоугольный треугольник OBC, в котором $\angle OBC=45°$; задача сводится к нахождению прямой DC, проходящей через точку D внутри угла BCA, вершина C которого недоступна; такой прямой является DK.

13. Прямая AB пересекает окружность в двух точках, A и B, при этом одна из них, точка B, недоступна. Построить диаметр, проходящий через недоступную точку B (рис. 242).

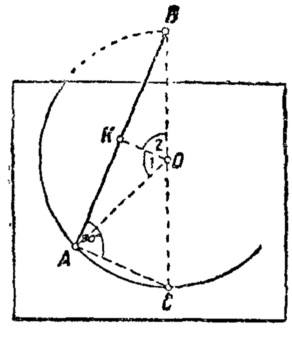


Рис. 242.

Решение задачи видно из рисунка 242. Если и точка C — конец диаметра — недоступна, то можно поступить так: провести $OK \perp AB$, соединить точку A с C и построить при точке O $\angle 2=\angle 1$.

В задачах 11—13 предполагается, что центр O окружности найден; положение его определяется обычным построением

14. Число градусов (угловых) угла, вписанного в данный сегмент, равно числу градусов дуговых, содержащихся в дуге данного сегмента. Найти этот угол.

Пусть искомый угол равен $x°$; дуга между его сторонами равна $2x$, так как искомый угол измеряется половиной этой дуги. Находим, что $360°-2x=x$, откуда $x=120°$.

15. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 50°. Каждая из боковых сторон стягивает дугу, касательную к основанию. На какие части делится каждая дуга другой дугой и стороной треугольника?

$\angle C=50°$ (рис. 243); следовательно $\angle A=\angle B=\frac{180°-50°}{2}=65°$; $\angle B$ измеряется дугой $\frac{BDC}{2}$, значит $\smile BDC=65°\cdot 2=130°$ и $\smile ADC=$ $=130°$. Половиной дуги ADF измеряется и $\angle C$, значит $\smile ADF=50°\cdot 2=100°$ и $\smile BDE=$ $100°$, а потому $\smile CE=\smile CF=130°-100°=$ $=30°$. Что касается дуг CED и CFD, стягиваемых общей хордой двух равных окружностей, то они тоже равны, значит равны и дуги ED и FD, а следовательно и хорды ED и FD, т. е. четырехугольник $CEDF$ — дельтоид и CD — биссектриса угла C, а потому $\angle BCD=25°$ и $\smile BD=50°$. Итак, $\smile BEC=$ $=130°$, $\smile BD=50°$, $\smile EC=30°$ и $\smile DE=$ $=130°-50°-30°=50°$.

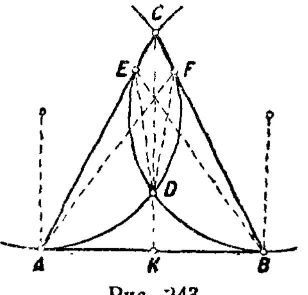


Рис. 243.

9. Когда учащиеся уже знакомы с теоремами об измерении углов с вершиной внутри или вне окружности или на самой окружности, следует им указать, что все эти теоремы можно объединить в одну.

В самом деле, если угол с вершиной внутри окружности измеряется полусуммою дуг, заключенных между его сторонами и их продолжениями, то так же измеряется и центральный угол, так как дуги между его сторонами, радиусами и их продолжениями за центр (также радиусами) равны, и угол, вершина которого лежит на окружности, так как дуга, заключенная между продолжением сторон такого угла равна нулю. Наконец, теорема справедлива и для случая, когда вершина угла лежит вне окружности, если дугу между центром и вершиной или, иначе, дугу, лежащую ближе к вершине, считать отрицательной и, таким образом, говорить об алгебраической сумме дуг (рис. 244). Итак, во всех случаях угол измеряется полусуммою дуг, заключенных между его сторонами и их продолжениями.

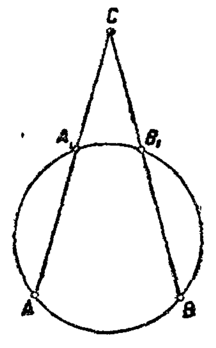


Рис. 244.

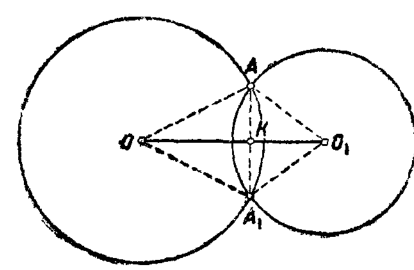


Рис. 245.

Взаимное положение окружностей.

10. После того как рассмотрено взаимное положение окружности и точки, окружности и прямой, окружности и угла или двух прямых, следует рассмотреть еще и взаимное положение двух окружностей.

Дается понятие о линии центров. Следует указать, что под линией центров подразумевается, с одной стороны, прямая, проходящая через центры двух окружностей, с другой — отрезок прямой, концами которого служат центры этих окружностей. Обычно линия центров рассматривается главным образом как отрезок.

Принимая во внимание, что прямая, проходящая через центры двух окружностей, есть их ось симметрии, следует, прежде всего, доказать теорему:

Если две окружности имеют общую точку, лежащую по одну сторону от линии центров, то они имеют общую точку и по другую сторону линии центров, т. е. окружности пересекаются (рис. 245).

Дано: окружности O и O_1; OO_1 — линия центров;
A — общая точка окружностей, не лежащая на линии центров.

Треб. док.: окружности имеют еще и вторую общую точку.

Доказательство. Проводим $AK \perp OO_1$ и продолжим AK за точку K на отрезок $KA_1 = KA$; тогда OO_1 — медиатриса отрезка AA_1, и потому $OA = OA_1$ и $O_1A = O_1A_1$, т. е. точка A_1 принадлежит обеим окружностям.

Если точка A — общая точка обеих окружностей — лежит на линии центров, то и другая точка, ей симметричная относительно оси OO_1, лежит на линии центров, т. е. совпадает с первой; в этом случае окружности имеют только одну общую точку — точку касания, лежащую на линии центров.

Прямые теоремы, рассмотренные в стабильном учебнике, обратимы, а потому следует привести учащимся пример доказательства хотя бы одной обратной теоремы, например:

если линия центров d двух окружностей равна сумме радиусов R и r, то окружности внешне касаются.

Если допустить, что окружности внешне не касаются, то возможен один из следующих случаев:

1) или окружности пересекаются, и тогда $R - r < d < R + r$,
2) " " внутренне касаются, и тогда $d = R - r$,
3) " " лежат одна вне другой, и тогда $d > R + r$,
4) " " лежат одна внутри другой, не касаясь, и тогда или $d < R - r$ или $d = 0$.

Но каждый из возможных случаев противоречит условию, а потому отпадает, и, следовательно, возможно только одно положение: внешнее касание окружностей, и тогда $d = R + r$, что соответствует условию.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Вершины четырехугольника $ABCD$ расположены на окружности так, что одна из его сторон, AB, равна диаметру, а противолежащая ей сторона CD равна радиусу. Найти угол между продолжениями двух других сторон.

2. Число угловых градусов описанного угла равно числу дуговых градусов меньшей из дуг, заключенных между его сторонами. Вычислить описанный угол.

3. В условиях задачи № 1 найти острый угол между диагоналями четырехугольника.

4. Два неравных круга имеют внешнее касание. К ним проведены внешние касательные. Хорды, соединяющие точки касания в каждом круге, равны $2a$ и $2b$. Найти длину касательных.

5. В круг радиуса R вписать 6 равных кругов, касающихся окружности данного круга, так, чтобы каждый из них касался двух соседних кругов. Найти радиус малого круга.

6. Хорда AB, отсекающая четверть окружности, пересечена диаметром CD. Найти угол между продолжениями хорд: 1) AC и BD, 2) AD и BC.

7. Найти геометрическое место точек, из которых можно провести равные касательные к двум окружностям, имеющим внешнее касание.

8. Если через точку T касания двух окружностей O_1 и O_2 проведена произвольная прямая ATB и в точки A и B — радиусы O_1A и O_2B и касательные AM и BN, то параллельны между собою радиусы O_1A и O_2B и касательные AM и BN. Доказать.

9. В два противоположных прямых угла вписано по окружности; радиусы их равны R и r. Найти отрезок их общей внешней касательной, заключенный между точками пересечения этой касательной с заданными сторонами обоих углов.

10. Из точки M, расстояние от которой до окружности равно радиусу окружности, проведены касательные. Найти угол между ними.

11. Две окружности O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B; $\angle AO_1B = \alpha$, $\angle AO_2B = \beta$. Под каким углом пересекаются окружности?

Указания к контрольным вопросам.

1. При решении задачи необходимо, чтобы учащийся, вычерчивая фигуру, отмечал на чертеже данные линии более жирными линиями, вспомогательные же линии — тонкими линиями или пунктиром. Так, отрезки AB и CD (рис. 245)

следует провести более жирными линиями, чем отрезки AD и CB и окружность, ибо на этих отрезках фиксируется внимание учащихся. Отрезки AD и BC продолжим пунктирными линиями до их взаимного пересечения в точке M. Искомый угол M обозначим или вопросительным знаком или буквой x. Такое выполнение чертежа позволяет учащемуся ясно представить себе все условия задачи, четко видеть данные и искомую величины, и мысль его тем самым активизируется.

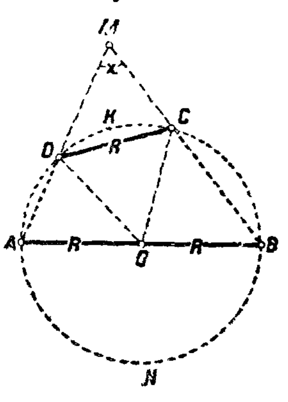


Рис. 246.

Когда чертеж выполнен, следует показать учащимся, в каком порядке проводится решение задачи. Внимание фиксируется на искомой величине. Установив, что искомый угол x образован двумя секущими к окружности, учащиеся должны вспомнить, что такой угол измеряется полуразностью дуг ANB и CKD, заключенных между сторонами угла, а потому для измерения угла $M=x$ надо знать дуги ANB и CKD.

$\smile ANB=180°$, ибо это — полуокружность; дальнейшее решение сводится к определению числа градусов, которые содержит дуга CKD, стягиваемая хордой $CD=R$. Учащиеся знают, что число градусов дуги соответствует числу градусов соответствующего центрального угла, и потому, естественно, должны его построить, соединив точки C и D с центром O (пунктирными линиями). Получившийся треугольник COD — равносторонний, так как каждая его сторона равна R, а потому $\angle COD=60°$, и, следовательно, $\smile CD=60°$. Задача решена.

$$\angle M=x=\frac{180°-60°}{2}=60°.$$

Следует обратить внимание учащихся на то, что $\angle M$ равен 60° при любом положении хорды DC, и предложить им проследить за положением точки M при перемещении отрезка DC по окружности. Полезно, если кто-либо из учащихся сконструирует для рассмотрения этого вопроса специальную подвижную модель.

2. Если обозначить число угловых градусов описанного угла через x, то и меньшая дуга содержит $x°$ дуговых, а бóльшая $360°-x°$, а потому

$$x=\frac{360°-x-x}{2},\text{ откуда } 2x=360°-2x \text{ или } 4x=360° \text{ и } x=90°.$$

3. Угол между диагоналями AC и BD равен $\frac{180°+60°}{2}=120°$, или $180°-120°=60°$; так как согласно условию задачи требуется определить острый угол, то, следовательно, искомый угол равен 60°.

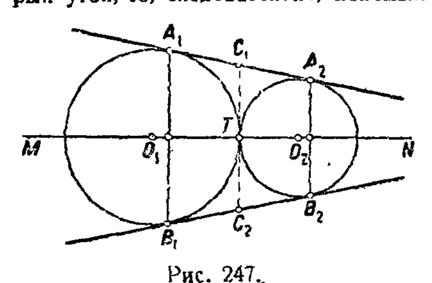


Рис. 247.

4. Прежде всего, учащиеся должны дать четкий чертеж. На произвольной прямой MN (рис. 247) от какой-либо точки ее T по обе стороны откладываются отрезки $TO_1=R_1$ и $TO_2=R_2$, причем $R_1>R_2$. Затем проводят окружность O_1 радиусом O_1T и окружность O_2 радиусом O_2T и общие внешние касательные к ним: A_1A_2 и B_1B_2. Четырехугольник $A_1A_2B_2B_1$ — трапеция, основания которой: $A_1B_1=2a$ и $A_2B_2=2b$. Проведя через точку касания T касательную C_1C_2, рассмотрим отрезок C_1C_2 этой касательной, заключенный между внешними касательными. $C_1A_1=C_1T=C_1A_2$ как касательные, проведенные к окружности из внешней точки; также и $C_2B_1=C_2T=C_2B_2$; поэтому C_1 и C_2 — середины боковых сторон трапеции и C_1C_2 — средняя линия трапеции, а потому

$$C_1C_2=\frac{2a+2b}{2}=a+b.$$

Из тех же равенств следует, что $C_1C_2 = A_1A_2 = B_1B_2$; значит, и $A_1A_2 = B_1B_2 = a + b$.

Решение этой задачи можно было бы предварить доказательством теоремы: **отрезок внутренней касательной двух внешне касающихся окружностей, заключенный между внешними касательными этих окружностей, равен каждой из этих внешних касательных.**

5. Допустим, что задача решена и в данную окружность O радиуса $OA = R$ вписаны 6 окружностей $O_1, O_2, O_3, \ldots$ (рис. 248); линии центров $O_1O_2 = O_2O_3 = \ldots = 2x$, где x — радиус малой окружности; треугольники OO_1O_2, $OO_2O_3, \ldots$ — равнобедренные и равные (ССС), так как $OO_1 = OO_2 = OO_3 \ldots = R - x$; с другой стороны, угол при вершине каждого из них равен $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, а потому треугольники равносторонние, и, следовательно, $OO_1 = O_1O_2$ или $R - x = 2x$, откуда $x = \frac{R}{3}$. Таким образом, центры малых окружностей лежат на окружности, концентрической с даной, радиуса $\frac{2}{3}R$.

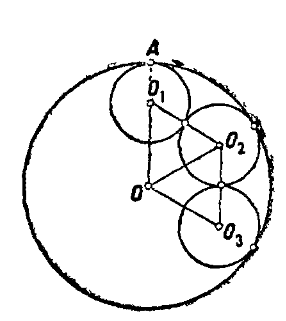


Рис. 248.

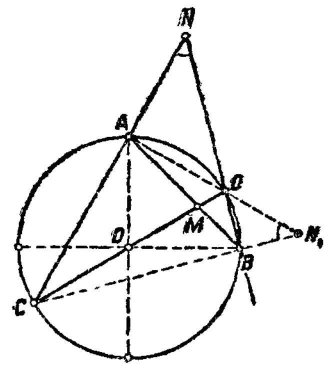


Рис. 249.

Анализ задачи указывает и пути решения задачи. Надо построить радиусом, равным $\frac{2}{3}R$, окружность, концентрическую данной, отложить от произвольно взятой на ней точки последовательно хорды длиною в $\frac{2}{3}R$ и, приняв точки деления окружности за центры, провести радиусом, равным $\frac{R}{3}$, требуемые 6 малых окружностей.

6. Дана окружность произвольного радиуса и хорда AB, стягивающая дугу, равную четверти окружности. Проводим диаметр CD (рис. 249); он пересечет хорду AB в точке M. Продолжив CA и BD до их пересечения в точке N, получаем $\angle CNB$, образованный двумя секущими, NAC и NDB.

Допустим, что $\smile CA = m^\circ$, тогда $\smile AD = 180^\circ - m^\circ$ и $\smile BD = 90^\circ - 180^\circ + m^\circ = m^\circ - 90^\circ$, а $\smile BC = 180^\circ - m^\circ + 90^\circ = 270^\circ - m^\circ$.

Поэтому $\angle N = \frac{270^\circ - m^\circ - 180^\circ + m^\circ}{2} = 45^\circ$. Угол AN_1C, заключенный между прямыми AD и CB, равен $\frac{m^\circ - m^\circ + 90^\circ}{2} = 45^\circ$.

Следует обратить внимание учащихся и на то, что $BN = BC$ и $AN_1 = AC$, ибо треугольники CAN_1 и CBN — прямоугольные и равнобедренные, так как и $\angle CAD$ и $\angle CBD$ опираются на диаметр.

7. Основываясь на разборе задачи 4, можно усмотреть, что таким геометрическим местом будет внутренняя касательная обеих окружностей, проходящая через точку касания окружностей (рис. 250). Остальное ясно из данного рисунка.

8. Сперва следует провести, как и при решении задачи 6, две внешне касающиеся окружности и через точку касания T окружностей — произвольную прямую AB, от которой окружности отсекают хорды TB в TA (рис. 251). Соеди-

нив точку B с O_2 и точку A с O_1, получим треугольники TO_2B и TO_1A; они *равнобедренны и углы их при основаниях равны.* Кроме того $\angle 1 = \angle 2$, как противоположные, а потому и $\angle TBO_2 = \angle TAO_1$. Касательные же AM и BN

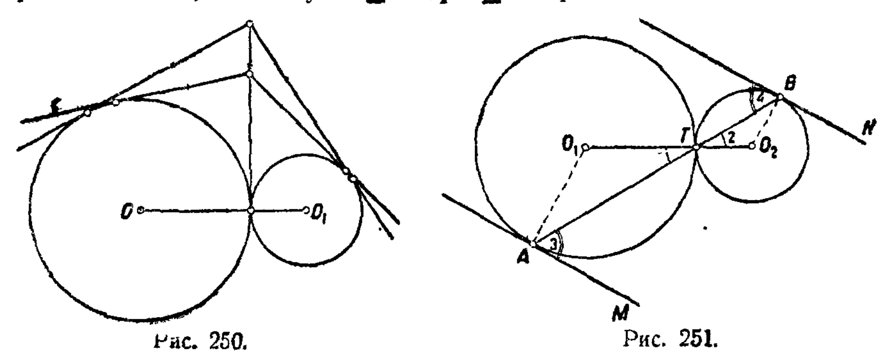


Рис. 250. Рис. 251.

проведенные через точки A и B, параллельны, ибо $\angle 3 = \angle 4$ как углы дополнительные равных углов TAO_1 и TBO_2.

Рисунок 252 дает решение той же задачи для окружностей, имеющих внутреннее касание.

9. TT_1 — внешняя касательная; пусть искомый отрезок $KL = x$ (рис. 253). Тогда $KT = KL + LT = KL + LN$ и $KT_3 = KM + MT_3 = KA + AN$. Следовательно $KL + LN = KA + AN = p$, ибо $KT = KT_3$; с другой стороны, $LT_1 = KL +$

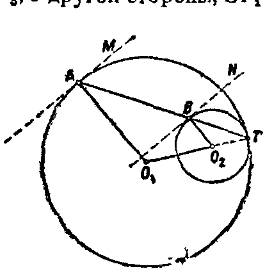


Рис. 252.

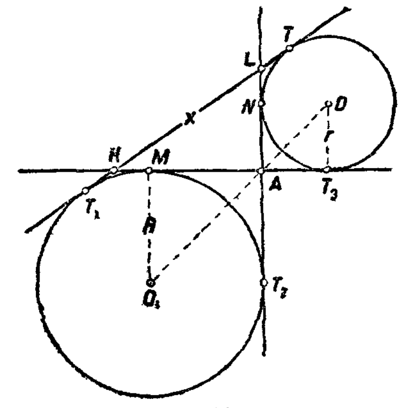


Рис. 253.

$+ KT_1 = KL + KM$ и $LT_2 = LA + AT_2 = LA + AM$. Следовательно $KL + KM = LA + AM = p$, ибо $LT_1 = LT_2$, значит:

$$LN = p - KL = p - x \text{ и } KM = p - KL = p - x.$$

Периметр всего треугольника KAL равен $2p = x + p - x + p - x + R + r$, откуда $x = R + r$.

10. За расстояние от точки M (рис. 254) до окружности следует принять к р а т ч а й ш е е расстояние, а именно — отрезок центральной секущей, концами которого служат данная точка M и точка K пересечения секущей с окружностью, лежащая между центром окружности и данной точкой. Из прямоугольного треугольника OTM, в котором $OT = R = \frac{1}{2} OM$, следует, что $\angle TMO = 30°$, а потому $\angle TMT_1 = 60°$.

11. Необходимо предварительно объяснить учащимся, что *углом пересечения двух окруж-*

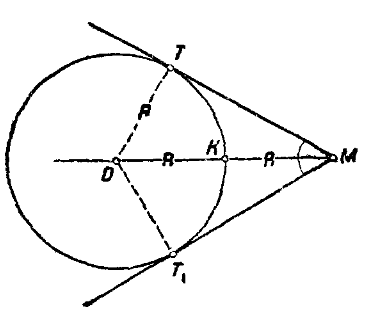


Рис. 254.

ностей называется угол, образованный двумя касательными к окружностям, проведенными через точку пересечения окружностей.

$\angle O_1AO_2 = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)$ (рис. 255), угол же между касательными равен $\frac{\alpha+\beta}{2}$, так как $\angle O_1AO_2$ и угол между касательными — взаимно пополнительные как углы с взаимно перпендикулярными сторонами, из которых один тупой, а другой острый. В данном случае за угол между касательными принят острый угол между ними.

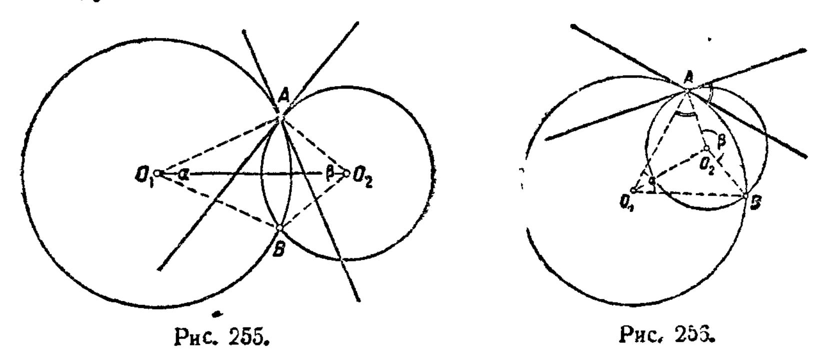


Рис. 255. Рис. 256.

Если расположить окружность так, как показано на рисунке 256, то $\angle O_1AO_2 = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - 180^\circ + \frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta-\alpha}{2}$, и, следовательно, острый угол, образуемый двумя касательными, равен $\angle O_1AO_2 = \frac{\beta-\alpha}{2}$.

§ 14. Пропорциональность и связанные с нею задачи.

Измерение отрезков.

1. Раздел этот позволяет особенно широко использовать язык и методы алгебры, формулировать многие геометрические задачи алгебраическим языком и с помощью его находить их решение.

Рассмотрение вопроса об отношении отрезков и вопроса о пропорциональных отрезках позволяет, с одной стороны, использовать знакомые учащимся из курса алгебры сведения об отношениях и пропорциях, с другой — оживить числовые зависимости, записанные языком алгебры, построением соответствующего геометрического образа, а также проверить построение отрезков вычислением.

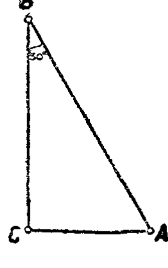


Рис. 257.

2. Из арифметики учащиеся знают, что если одно число, например 288, делится на другое число, например 24, без остатка, то меньшее число 24 есть общий наибольший делитель обоих данных чисел 288 и 24; общими делителями обоих чисел будут, конечно, и числа 2, 3, 4, 6 и т. д., но общим наибольшим делителем будет 24. Общий наибольший делитель чисел 288 и 24 не может быть больше 24, ибо тогда меньшее из двух данных чисел, а именно 24, не делилось бы на него нацело.

Полная аналогия имеет место в геометрии. Если при рассмотрении двух отрезков a и b, где $a > b$, меньший из них b содержится в большем

из них a целое число раз, то отрезок b называется **общей мерой** двух отрезков a и b и притом наибольшей общей мерой. Понятно, что и любая доля отрезка b, а именно: $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{3}b$, $\frac{1}{10}b \ldots \frac{1}{n}b$, где n — целое число, также является общей мерой двух отрезков a и b; однако ни одна из них не будет общей **наибольшей** мерой.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (рис. 257), в котором $\angle C = 90°$ и $\angle B = 30°$. Катет AC, как лежащий против угла в $30°$, равен половине гипотенузы, а это значит, что отрезок AC содержится в отрезке AB ровно два раза; следовательно катет AC и гипотенуза AB имеют общую и притом наибольшую меру; таковой мерой является отрезок AC. Итак:

$$AB = 2AC, \quad \text{или} \quad \frac{AB}{AC} = 2.$$

Очевидно, что и $\frac{1}{2}AC$, $\frac{1}{3}AC$, $\frac{1}{10}AC \ldots \frac{1}{n}AC$, где n — целое число, также являются общей мерой отрезков AC и AB — двух сторон **данного** треугольника.

Точно так же общей наибольшей мерой гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника и высоты, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу, является указанная высота, которая содержится в гипотенузе **данного** прямоугольного треугольника два раза.

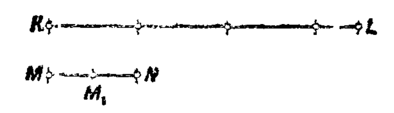


Рис. 258.

Заметим, что если какой-либо отрезок MN (рис. 258) не содержится целое число раз в другом каком-либо отрезке KL, но какая-либо $\frac{1}{n}$ доля отрезка MN, где n — целое число, положим $\frac{1}{2}MN = MM_1$, содержится в отрезке KL целое число раз, то отрезок MM_1 будет общей мерой двух отрезков KL и MN.

Чтобы познакомить учащихся с методом нахождения общей меры двух данных отрезков, следует предварительно рассмотреть с ними аналогичный пример из арифметики.

Пусть требуется найти общий наибольший делитель чисел 462 и 189. Прежде всего, учащийся проверяет, не делится ли без остатка большее число на меньшее, ибо если такое деление нацело возможно, то меньшее из данных чисел, а именно число 189, будет общим наибольшим делителем данных чисел.

Выполняем деление:

$$\begin{array}{r} 462:189 = 2 \\ \underline{378} \\ 84 \end{array}$$

Итак, число 462 при делении на 189 дает в частном 2 и в остатке 84, а потому

$$462 = 189 \cdot 2 + 84. \qquad (1)$$

Отсюда следует, что если пара чисел, как, например, числа 462 и 189, имеют общий наибольший делитель, то этот наибольший делитель будет общим наибольшим делителем и пары чисел 189 и 84. В самом деле, если сумма двух чисел (462) и одно из двух слагаемых ($189 \cdot 2$) делятся нацело на некоторое число, то и второе слагаемое должно делиться на это число.

Таким образом, нахождение общего наибольшего делителя пары чисел 462 и 189 сводится к нахождению общего наибольшего делителя другой пары чисел,

чисел 189 и 84, из которых одно — меньшее из двух данных чисел, а другое — остаток, полученный при делении большего из данных двух чисел на меньшее.

Понятно, что общий наибольший делитель чисел 189 и 84 не может быть больше 84. Проверка, делится ли число 189 на 84, дает:

$$189 = 84 \cdot 2 + 21. \qquad (2)$$

Аналогичными рассуждениями заключаем, что общий наибольший делитель пары чисел, 189 и 84, заменяется нахождением общего наибольшего делителя пары чисел, 84 и 21. Но так как $84 = 21 \cdot 4$, то число 21 будет общим наибольшим делителем чисел 84 и 21.

Из равенства (2) следует, что число 21 будет общим наибольшим делителем и чисел 189 и 84, а из равенства (1) следует, что число 21 будет общим наибольшим делителем и чисел 462 и 189.

Последовательное расположение действий следующее:

	2	2	4
462	189	84	21
378	168	84	

Подобное рассмотрение вопроса о нахождении общего наибольшего делителя двух чисел весьма целесообразно; оно помогает учащимся осознать метод нахождения общей наибольшей меры двух отрезков, если последние имеют общую меру.

Следует указать учащимся, что для заданных двух целых чисел всегда можно найти способом последовательного деления общий наибольший делитель; пары делимых чисел последовательно уменьшаются, так как остаток меньше делителя: 462, 189, 84, 21, и в отдельных случаях, когда остаток равен единице, общий наибольший делитель двух чисел будет также равен единице. Заметим, что числа, общий наибольший делитель которых равен единице, называются **взаимно простыми** числами. Так, числа 476 и 195 — взаимно простые: их общий наибольший делитель равен единице.

3. После разбора примера, взятого из арифметики, рассматриваются два отрезка AB и CD ($AB > CD$), имеющие общую меру, причем отрезок CD не содержится целое число раз в отрезке AB (рис. 259).

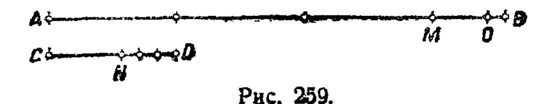


Рис. 259.

Откладываем отрезок CD на отрезке AB; пусть он содержится в отрезке AB 3 раза и дает остаток MB, тогда

$$AB = 3CD + MB, \qquad (1)$$

при этом $MB < CD$.

Отложим затем отрезок MB на отрезке CD; пусть он уложится на CD один раз и даст остаток ND, тогда

$$CD = MB + ND, \qquad (2)$$

где $ND < MB$.

Отложим еще ND на MB, и пусть ND уложится в MB один раз и даст остаток OB, тогда

$$MB = ND + OB, \qquad (3)$$

где $OB < ND$.

Пусть, наконец, OB содержится в ND три раза, так что

$$ND = 3OB. \quad (4)$$

Подставляя в равенство (3) полученное для ND значение, имеем:

$$MB = 3OB + OB = 4OB.$$

Подставляя полученные для MB и ND значения в равенство (2), имеем:

$$CD = 4OB + 3OB = 7OB.$$

Таким же образом находим, что

$$AB = 21OB + 4OB = 25OB.$$

Следовательно, $AB = 25OB$ и $CD = 7OB$, и, таким образом, отрезок OB принимается за единицу измерения отрезков AB и CD.

Этот отрезок OB называется общей мерой отрезков AB и CD; итак,

общей мерой двух отрезков называется такой третий отрезок, который содержится целое число раз в каждом из данных отрезков.

Если разделить отрезок OB на любое целое число n равных частей, то $\frac{1}{n}$ отрезка OB будет также общей мерой отрезков AB и CD, и при этом OB — наибольшая общая мера.

Надо указать учащимся, что если в арифметике нахождение общего наибольшего делителя двух чисел способом последовательного деления всегда приводит к цели, т. е. к отысканию общего наибольшего делителя, то в геометрии нахождение общей меры двух отрезков не всегда возможно.

Дается определение: *два отрезка, имеющие общую меру, называются соизмеримыми, а два отрезка, не имеющие общей меры, называются несоизмеримыми.*

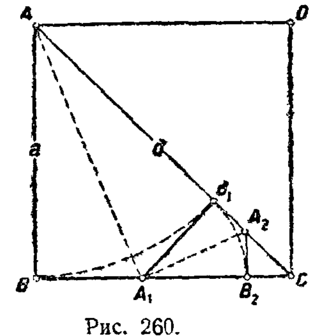


Рис. 260.

Существование несоизмеримых отрезков необходимо доказать учащимся. Следует рассмотреть классический пример двух несоизмеримых отрезков, именно — несоизмеримость стороны и диагонали квадрата.

Теорема: **Диагональ квадрата и его сторона несоизмеримы.** Обозначим сторону квадрата $AB = BC$ через a и диагональ AC через d (рис. 260). Из равнобедренного прямоугольного треугольника ABC находим: $a < d < 2a$. Последнее неравенство указывает, что на гипотенузе d можно отложить катет a только один раз. Отложив на гипотенузе AC отрезок $AB_1 = AB$, получим в остатке отрезок B_1C, который меньше $BC = a$. Итак, $B_1C < a$. Обозначив B_1C через a_1, имеем:

$$d = a + a_1.$$

Проведя затем $B_1A_1 \perp AC$ и соединив точку A_1 с точкой A, находим, что $\triangle ABA_1 = \triangle AB_1A_1$, так как у них общая гипотенуза AA_1

и равные катеты $AB_1 = AB = a$; из равенства треугольников следует, что $A_1B = A_1B_1$; $A_1B_1 = B_1C = a_1$, так как треугольник A_1B_1C равнобедренный и прямоугольный, его $\angle B_1C_1A = 45°$.

Остаток $B_1C = a_1$ содержится в отрезке $BC = a$ два раза, ибо $B_1C = BA_1$ и $a_1 < A_1C < 2a_1$. Отложив $B_1C = B_1A_1 = a_1$ на отрезке A_1C, имеем $a = 2a_1 + a_2$, где $a_2 = B_2C$.

Проведя затем $B_2A_2 \perp A_1C$, получим снова равнобедренный прямоугольный треугольник $A\,B_2C$; из сравнения равных треугольников $A_1B_1A_2$ и $A_1B_2A_2$ находим $A_2B_2 = A_2B_1$, а потому $a_1 = 2a_2 + a_3$, где a_3 — остаток, получаемый при вычитании A_2B_2 из отрезка A_2C, и т. д.

Итак, сколько ни продолжать указанным способом „последовательные деления", ни один из последующих остатков не укладывается целое число раз в предыдущем остатке, а потому отрезки a и d, **сторона и диагональ квадрата, несоизмеримы.**

Учитывая, что учащиеся нередко не сразу уясняют себе возможность существования несоизмеримых отрезков, следует выполнить последовательное откладывание отрезков возможно большее число раз. В силу этого надлежит построить по возможности крупный чертеж, чтобы получаемые отрезки четко выделялись на рисунке.

A——B

C——D

Рис. 261.

После разбора теоремы о несоизмеримости стороны и диагонали квадрата следует дать учащимся для самостоятельной проработки задачу на нахождение последовательным делением общей меры двух отрезков, а также задачу на доказательство того, что сторона и основание равнобедренного треугольника с углом в 36° при основании — несоизмеримые отрезки.

Итак, **измерить отрезок a — значит найти его отношение к отрезку b, принятому за единицу,** иначе говоря, узнать, сколько раз отрезок b содержится в отрезке a. Если отрезок CD (рис. 261), принятый за единицу, содержится в отрезке AB 5 раз, то это записывают так:

$$AB = 5CD \quad \text{или} \quad \frac{AB}{CD} = 5.$$

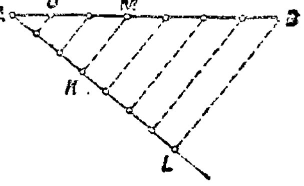
Если разделить отрезок CD на несколько равных частей, например на n равных частей, то за единицу измерения можно принять $\frac{1}{n}$ отрезка CD, и тогда $\dfrac{AB}{\frac{CD}{n}} = 5n$.

Из курса арифметики и алгебры учащиеся знают, что *отношением двух чисел a и b называется такое третье число q, на которое следует умножить второе число, чтобы получить первое a.* Аналогично этому в геометрии *отношением двух отрезков AB и CD называется такое число q, которое показывает, сколько раз следует взять отрезок CD или часть его, чтобы получить отрезок AB.*

Понятно, что в том случае, когда отрезок CD принят за единицу, число q указывает, сколько раз отрезок CD содержится в отрезке AB.

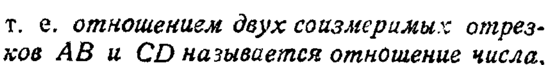
Следует указать, что отношение чисел 462 и 189 может быть заменено отношением чисел 22 и 9, которые получились из данных чисел сокращением на их общий наибольший делитель.

$$\frac{462}{189}=\frac{22\cdot 21}{9\cdot 21}=\frac{22}{9}.$$



То же указание относится и к отношению двух отрезков; так,

$$\frac{AB}{CD}=\frac{25OB}{7OB}=\frac{25}{7},$$



т. е. *отношением двух соизмеримых отрезков AB и CD называется отношение числа, измеряющего один отрезок AB в каких-либо единицах (OB), к числу, измеряющему другой отрезок CD в тех же единицах (OB).*

Рис. 262.

4. На умении делить отрезок на равные части основано решение задачи:

Разделить данный отрезок AB на два отрезка, которые относятся, как $3:4$.

Отрезок AB делится на 7 равных частей; выполняется построение, указанное на рисунке 262, и тогда $\frac{AM}{MB}=\frac{3}{4}$. Общей мерой отрезков AM и MB служит отрезок AO.

Необходимо затем несколько усложнить условия задачи и предложить разделить отрезок AB на части в отношении $2:1\frac{1}{2}$ или $1\frac{1}{2}:2\frac{1}{3}$.

В данном случае отношение дробных чисел заменяется отношением целых чисел, и решение задачи выполняется обычным порядком.

Учащиеся должны уметь разделить отрезок AB в отношении вида $2:3:4$. Желательно указать им, что умение решить такую задачу позволяет выполнить деление отрезка AB на части и в отношении $5:4$; $2:7$ и т. д.

Следует решить задачу:

Дан ряд параллельных прямых, отстоящих друг от друга на одинаковое расстояние; эти параллели пересечены прямой AB. Доказать, что отрезки прямой между параллелями равны (рис. 263).

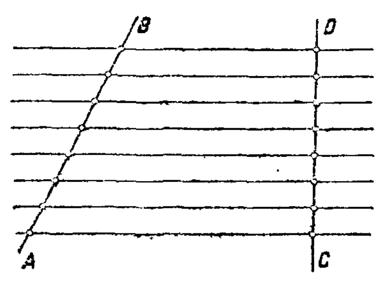


Рис. 263.

Когда задача решена, следует провести еще прямую CD и 1) поставить вопрос, при каком условии отрезки одной прямой равны отрезкам другой прямой, и 2) записать отношение двух отрезков одной прямой и равное отношение двух соответствующих отрезков другой прямой.

Прежде чем перейти к рассмотрению пропорциональных отрезков и к теоремам о пучке лучей, пересекаемом рядом параллельных прямых, следует пояснить, что должно понимать под отношением двух несоизмеримых отрезков.

Даны два несоизмеримых отрезка, AB и AC (рис. 264). Пусть отрезок AB разделен на 10 равных частей, и пусть при наложении отрезка AC на AB конец C упадет между седьмым и восьмым делением отрезка AB. Разделим отрезок MN на 10 равных частей, и пусть точка C поместилась между третьим и четвертым делением отрезка MN; тогда

$$0{,}7 < \frac{AC}{AB} < 0{,}8 \quad \text{и} \quad 0{,}73 < \frac{AC}{AB} < 0{,}74$$

Рис. 264.

Если затем принять $\frac{AC}{AB} \approx 0{,}7$, то отношение отрезков $\frac{AC}{AB}$ равно, как говорят, 0,7 с недостатком и с точностью до 0,1; если же принять $\frac{AC}{AB} \approx 0{,}8$, то отношение $\frac{AC}{AB}$ равно 0,8 с избытком и с той же точностью до 0,1. Точно так же $\frac{AC}{AB} \approx 0{,}73$ с недостатком и с точностью до 0,01 и $\frac{AC}{AB} \approx 0{,}74$ с избытком и с точностью до 0,01. Можно было бы продолжить вычисление приближенного отношения отрезков с большей точностью, например до 0,001, 0,0001 и т. д., с точностью до 1 микрона[1] (μ) или даже до 1 миллимикрона ($m\mu$), однако для практических целей в большинстве случаев такая точность и ненужна; при записи отношения $\frac{AC}{AB} = 0{,}73\ldots$ точки означают, что десятичная дробь бесконечна.

Отношение несоизмеримых отрезков есть бесконечная непериодическая десятичная дробь, которая и называется иррациональным числом.

Так, отношение диагонали квадрата к его стороне — число иррациональное и равно $\sqrt{2}$; иррациональным числом является также и отношение диагонали квадрата к $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{10} \ldots \frac{1}{n}$ стороны квадрата, где n — целое число.

Пропорциональные отрезки.

5. Два равных отношения, соединенные знаком равенства, составляют кратную пропорцию.

Если отношение $\frac{a}{b}$ двух соизмеримых отрезков a и b равно q, а отношение $\frac{c}{d}$ двух других соизмеримых отрезков c и d также равно q, то такие четыре отрезка называются пропорциональными и $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Отношение двух несоизмеримых отрезков принимается равным отношению двух других несоизмеримых отрезков, если оба отношения,

[1] 1 микрон (μ) равен 0,001 *мм*, 1 миллимикрон ($m\mu$) равен 0,001 микрона (μ).

вычисленные с произвольной, но одинаковой степенью точности, равны. Так, если

$$\frac{m}{n} < \frac{a}{b} < \frac{m+1}{n} \quad \text{и} \quad \frac{m}{n} < \frac{c}{d} < \frac{m+1}{n},$$

где a, b, c и d — отрезки, а m и n — целые числа, то $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

В обоих случаях записанные равенства обладают теми же свойствами, которые принадлежат и кратной пропорции в алгебре. Эти свойства перечислены в любом учебнике алгебры или геометрии.

6. При рассмотрении теорем о пучке прямых, пересеченном рядом параллельных, и теорем, им обратных, следует ограничиться, если состав класса несильный, рассмотрением только случая соизмеримых отрезков, все же указав учащимся, что теорема верна и для несоизмеримых отрезков. При более сильном составе нужно рассмотреть и случай несоизмеримых отрезков.

Свойством параллелей, пересекающих стороны угла, а также свойством биссектрис треугольника можно воспользоваться для решения задачи:

Разделить пополам угол между двумя пересекающимися прямыми, если точка их пересечения находится вне пределов рисунка.

Пусть две прямые, AB и BC, пересекаются в точке B, лежащей вне пределов рисунка. Отметим на одной из них, например AB, две произвольные точки K и L и проведем две прямые $KK_1 \parallel LL_1$ (рис. 265), пересекающие стороны угла, и отложим $LK = LM = LN$ и $L_1K_1 = L_1N_1 = L_1M_1$. Прямые NK и N_1K_1 пересекутся в точке O, прямые NM и N_1M_1 пересекутся в точке O_1; прямая OO_1 — искомая биссектриса.

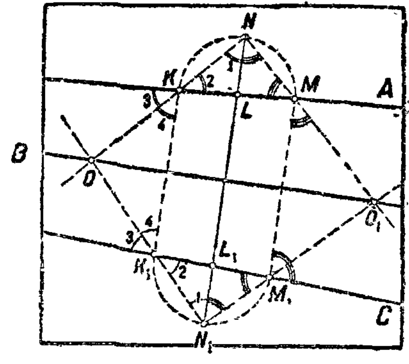


Рис. 265.

В самом деле, согласно построению, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 2 = \angle 3$, но $\angle 1 = \angle 4$ как углы соответственные, а потому $\angle 3 = \angle 4$, т. е. KO — биссектриса; таким же образом K_1O — биссектриса второго угла треугольника KBK_1, точка же пересечения двух биссектрис треугольника лежит на третьей его биссектрисе. Таким же образом биссектрисы внешних углов треугольника MBM_1 пересекаются в точке O_1, лежащей на третьей биссектрисе, биссектрисе угла MBM_1. Значит, OO_1 — биссектриса угла ABC. Особенно удобен этот способ деления угла пополам для весьма малых углов.

Рассмотрим еще один способ деления пополам угла с недоступной вершиной, основанный на свойстве углов со взаимно перпендикулярными сторонами.

Из произвольной точки D стороны CB (рис. 266) проводим $DE \perp CB$ и $DF \perp AB$; тогда угол $\angle EDF = \angle ABC$ как углы с взаимно перпендикулярными сторонами и оба острые. Проводим DG — биссектрису

угла EDF, а затем — медиатрису MN отрезка DG; прямая MN и будет биссектрисой угла ABC, так как $\angle MBA = \angle GDF$ и $\angle MBC = \angle EDG$, но $\angle GDF = \angle EDG$, а потому $\angle MBA = \angle MBD$, т. е. MB — биссектриса.

Наконец, приводим еще один способ деления пополам угла с недоступной вершиной.

Проводим $MN \parallel BC$ и $KN \parallel BA$ и диагональ MK параллелограма $BMNK$ (рис. 267). Пусть NO — биссектриса угла N. Если точка O — середина отрезка MK, то NO — *искомая прямая; если же точка* O не есть середина отрезка MK, то, откладывая $KO_1 = MO$, проводим через O_1 прямую $O_1B \parallel NO$, тогда O_1B — искомая биссектриса.

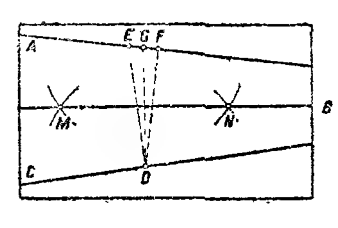


Рис. 266.

Рис. 267.

В самом деле, $\angle MNK = \angle MBK$, кроме того $\angle 1 = \angle 2$ и $\triangle MO_1B = \triangle NOK$ (СУС), а потому $\angle MBO_1 = \angle 2$. Таким же образом доказывается, что $\angle KBO_1 = \angle MNO = \angle 1$, следовательно $\angle MBO_1 = \angle KBO_1$, а это значит, что BO_1 — биссектриса.

Другие способы деления угла пополам были указаны ранее.

Решаются приведенные ниже задачи на построение четвертого пропорционального отрезка x к трем данным отрезкам a, b и c или a, a и c (№ 1 и 2); в последнем случае x называется также *третьим пропорциональным* и a есть средний пропорциональный отрезок отрезков x и c, а также задачи, основанные на них.

1) Построить отрезок $x = \frac{ab}{c}$, где a, b и c — данные отрезки.

2) Построить отрезок $x = \frac{a^2}{c}$, где a и c — данные отрезки.

3) Построить отрезок $x = \frac{abc}{de}$, где a, b, c, d и e — данные отрезки.

Последнюю задачу решают так:

$$x = \frac{abc}{de} = \frac{ab}{d} \cdot \frac{c}{e} = \frac{mc}{e}, \text{ где } \frac{ab}{d} = m,$$

при этом сперва строится отрезок m, а затем уже $x = \frac{m \cdot c}{e}$.

Из равенства $m = \frac{ab}{d}$ имеем: $d : a = b : m$ (рис. 268) и из равенства $x = \frac{m \cdot c}{e}$ имеем: $e : m = c : x$.

При выполнении построения не следует проводить лишних линий; также необходимо следить за тем, чтобы не получалось, по возможности, покрытия одной фигуры другою.

4) Построить отрезок $y=\frac{(a+b)(a-b)}{c}$.

Порядок построения:

а) $a+b=m$,

б) $a-b=n$

и

в) $y=\frac{mn}{c}$.

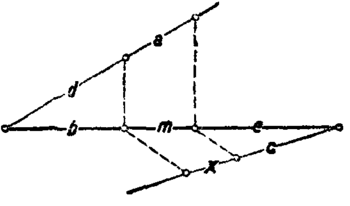


Рис. 268.

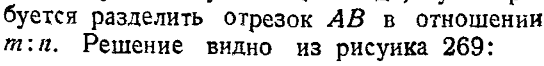
5) Построить отрезок $y=\frac{(m+n)a^2}{cd}+\frac{(a-b)d}{c}$.

Порядок построения:

а) $m+n=k$, б) $\frac{a^2}{c}=l$, в) $\frac{kl}{d}=p$,

г) $a-b=q$, д) $\frac{qd}{c}=r$ и е) $y=p+r$.

7. Учащиеся уже рассматривали задачу о делении отрезка в отношении 3:4; следует решить аналогичную задачу в общем виде; пусть требуется разделить отрезок AB в отношении $m:n$. Решение видно из рисунка 269:



$$\frac{AM}{MB}=\frac{AC}{CD}=\frac{m}{n}.$$

Рис. 269.

Полезно расположить на плоскости доски или на листе бумаги отрезок AB так, чтобы нельзя было построить угол „над" отрезком AB; понятно, что тогда построение угла выполняется по другую сторону отрезка AB.

Надо также обратить внимание учащихся на величину углов, которые строятся при точках A и B отрезка AB; надо предложить им при решении задачи построить или тупой угол, или малый острый угол, чтобы они сами могли убедиться в том, построение какого угла для данной цели наиболее целесообразно.

Рис. 270.

Когда построение выполнено (рис. 270), можно предложить учащимся принять точки C, D и B за вершины параллелограма и найти четвертую его вершину. Построение приводит к новому способу деления отрезка AB на части, пропорциональные отрезкам m и n; построение дано на рисунке 271.

Рис. 271.

Последний способ используется при решении задачи:

дан треугольник ABC; разделить его основание AB (рис. 272) на две части, которые относятся между собою, как две другие стороны треугольника.

Проведя $AD \parallel CB$, отложим $AD = AC = b$. Соединив затем точку D с точкой C, получим искомую точку E, в которой основание AB делится на два отрезка BE и EA, отношение которых $\frac{BE}{EA} = \frac{a}{b}$.

Из рассмотрения рисунка 272 убеждаемся, что треугольник DAC — равнобедренный и $\angle ACD = \angle ADC$; но $\angle ADC = \angle BCD$ как углы внутренние накрестлежащие, а потому $\angle ACD = \angle BCE$, а это значит, что CE — биссектриса угла C.

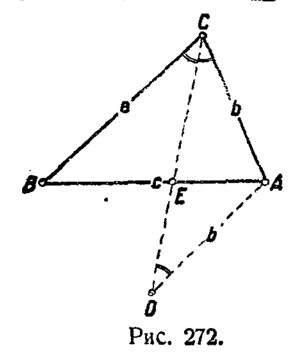


Рис. 272.

После разбора этой задачи теорема о биссектрисе угла треугольника становится учащимся более доступной; можно предложить им доказать ее самим.

Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону треугольника на два отрезка, отношение которых равно отношению двух других сторон, к ним прилежащих, или на два отрезка, пропорциональные двум другим сторонам треугольника.

Доказательство этой теоремы проводится обычным путем и закрепляется числовыми примерами.

Такая проверка справедливости полученного вывода пробуждает активность учащихся.

Пример: стороны треугольника $a = 13$ *см*, $b = 14$ *см* и $c = 15$ *см*. На какие части биссектриса β_B делит сторону b?

Обозначив отрезки стороны $b = 14$ *см* через $13x$ и $15x$, имеем: $13x + 15x = 14$, откуда $x = \frac{14}{28} = \frac{1}{2}$ и $13x = 6{,}5$, $15x = 7{,}5$. Итак, биссектриса делит сторону b на отрезки, равные 6,5 *см* и 7,5 *см*. Следует придерживаться указанного обозначения отрезков, отношение которых дано; x — коэфициент пропорциональности; в данном примере он равен $\frac{1}{2}$.

8. Обратная теорема: **если точка E делит сторону AB треугольника ABC на две части BE и EA так, что $\frac{BE}{EA} = \frac{BC}{AC}$, то прямая CE — биссектриса угла C, лежащего против стороны AB, т. е.** $\angle BCE = \angle ACE$, — обычно принимается без доказательства.

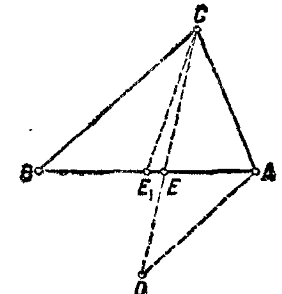


Рис. 273.

Приводим ее доказательство, проводимое методом доказательства от противного.

Допустим, что CE (рис. 273) не есть биссектриса, а биссектрисой угла C служит какая-нибудь другая прямая CE_1; тогда

$$\frac{BE_1}{E_1A} = \frac{BC}{AC}; \text{ по условию } \frac{BE}{EA} = \frac{BC}{AC},$$

а потому должно иметь место равенство:

$$\frac{BE_1}{E_1A} = \frac{BE}{EA}.$$

Но $\frac{BE_1}{E_1A} \neq \frac{BE}{EA}$, так как $BE_1 < BE$ и $AE_1 > AE$ и с уменьшением числителя дробь уменьшается, дробь уменьшается также с увеличением знаменателя, а потому допущение, что не CE, а CE_1 — биссектриса, неверно; точка E_1 должна совпасть с точкой E и CE — биссектриса угла C.

Можно повести рассуждение и так:

$$BE_1 = BE - E_1E,$$

$$E_1A = AE + E_1E$$

или

$$\frac{BE - E_1E}{AE + E_1E} = \frac{BE}{AE},$$

откуда

$$BE \cdot AE - E_1E \cdot AE = AE \cdot BE + BE \cdot E_1E,$$

или

$$BE \cdot E_1E + E_1E \cdot AE = 0,$$

т. е.

$$E_1E\,(BE + AE) = 0 \quad \text{и} \quad E_1E \cdot AB = 0.$$

Последнее равенство возможно только при условии, если $E_1E = 0$, так как $AB \neq 0$. Значит, CE_1 и CE совпадают, т. е. CE — биссектриса. Этим обнаруживается, что между точками A и B есть только одна точка, точка E, в которой отрезок AB делится в отношении $BC:AC$.

9. Не следует ограничиваться рассмотрением только теоремы о биссектрисе внутреннего угла треугольника. Следует поставить вопрос, справедлива ли теорема, если провести биссектрису внешнего угла; ведь она также может пересечь продолжение стороны треугольника. Если так, то какая зависимость существует между образовавшимися отрезками? Можно ограничиться указанием, что в этом случае расстояния от точки пересечения биссектрисы внешнего угла со стороной треугольника до концов этой стороны относятся между собою, как две другие стороны треугольника.

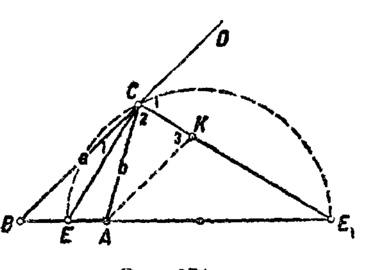


Рис. 274.

Теорема о биссектрисе внешнего угла треугольника может служить весьма интересной темой как для кружковой работы, так и при повторении курса геометрии в старших классах.

Доказательство теоремы. Пусть CE_1 — биссектриса внешнего угла DCA треугольника ABC (рис. 274), тогда $\angle 1 = \angle 2$, и пусть CE_1 пересекает продолжение стороны BA в точке E_1.

Если провести $AK \parallel BC$ до пересечения с биссектрисой CE_1 в точке K, то лучи E_1C и E_1B, пересекаемые параллелями BC и AK, дадут:

$$\frac{E_1B}{E_1A} = \frac{BC}{AK}.$$

Но $\angle 3 = \angle 1$ как углы внутренние накрестлежащие при параллельных BC и AK и секущей CK, а потому $\angle 3 = \angle 2$ и треугольник

KAC — равнобедренный: $AK = AC$; заменив в полученной пропорции AK через AC, имеем:

$$\frac{E_1B}{E_1A} = \frac{BC}{AC},$$

т. е. биссектриса внешнего угла C треугольника ABC пересекает продолжение стороны BA в точке, расстояния которой E_1B и E_1A до концов B и A стороны BA треугольника относятся, как другие две прилежащие стороны треугольника. Кроме того справедливо: $\frac{E_1B}{E_1A} = \frac{EB}{EA}$.

Разбор теоремы можно предварить задачей:

На прямой MN даны две точки, A и B; найти на прямой MN такую третью точку, C, чтобы отношение $\frac{CA}{CB} = \frac{m}{n}$, где m и n — данные отрезки.

Точка C находится известным учащимся построением (рис. 275). Если продолжить B_1B на отрезок $BB_2 = BB_1$ и провести прямую через точки A_1 и B_2, то прямая A_1B_2 пересечет MN в точке C_1, и тогда $\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{m}{n}$, т. е. на прямой MN имеется, кроме точки C, еще и другая точка, C_1, удовлетворяющая условию задачи: отношение расстояний точки C_1 до двух данных точек A и B равно отношению m и n.

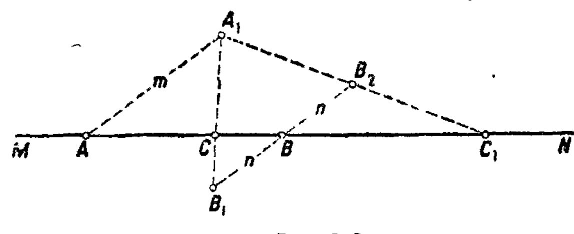


Рис. 275.

В этом случае говорят, что отрезок AB точкой C, лежащей между A и B, делится в данном отношении „внутренне", а точкой C_1, лежащей на продолжении AB,— „внешне" в том же отношении. Заметим, что такое деление отрезка „внутренне и внешне" принято называть гармоническим.

Обозначим:

$$AB = a; \quad \begin{array}{c|c} CA = x & C_1A = x_1 \\ CB = y & C_1B = y_1. \end{array}$$

Тогда:

$$1) \begin{cases} x + y = a \\ x : y = m : n. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, имеем:

$$x = \frac{ma}{m+n} \quad \text{и} \quad y = \frac{na}{m+n},$$

т. е. существует только одна точка C между A и B, в которой AB внутренне делится в отношении $m:n$.

$$2) \begin{cases} x_1 - y_1 = a \\ x_1 : y_1 = m : n \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, имеем:

$$x_1 = \frac{ma}{m-n} \quad \text{и} \quad y_1 = \frac{na}{m-n},$$

т. е. существует только одна точка C_1, лежащая на продолжении отрезка AB, для которой справедливо отношение $\frac{C_1A}{C_1B}=\frac{m}{n}$.

Если $m=n$, то

$$1)\ x=\frac{a}{2} \quad \text{и} \quad y=\frac{a}{2}$$

и точка C — середина отрезка AB;

$$2)\ x_1=\frac{ma}{0} \quad \text{и} \quad y_1=\frac{na}{0},$$

т. е. по мере приближения n к m точка C_1 удаляется все дальше, а при $m=n$ точка C_1 удаляется в бесконечность; говорят, что при $m \to \infty$ отрезки становятся лучами, т. е. $x_1 \to \infty$ и $y_1 \to \infty$, и $A_1B_2 \parallel AB$, или, как говорят в проективной геометрии, A_1B_2 пересекает AB в бесконечно удаленной точке.

Отрезок AB, который больше AC, но меньше AC_1, называется *средним гармоническим* отрезков AC и AC_1.

Непосредственно из чертежа следует, что

$$\frac{AB-AC}{AC}=\frac{AC_1-AB}{AC_1}.$$

Откуда

$$\frac{AB}{AC}-1=1-\frac{AB}{AC_1}$$

$$AB(AC_1+AC)=2AC_1\cdot AC,$$

следовательно

$$AB=\frac{2AC\cdot AC_1}{AC+AC_1} \quad \text{и} \quad AB=\frac{AC\cdot AC_1}{\frac{AC+AC_1}{2}},$$

т. е. **среднее гармоническое двух отрезков AC и AC_1 равно отношению произведения этих отрезков к их среднему арифметическому.**

Среднее геометрическое g отрезков AC и AC_1 будет $g=\sqrt{AC\cdot AC_1}$, следовательно $AC\cdot AC_1$ есть квадрат среднего геометрического отрезков AC и AC_1, т. е. g^2.

Обозначив среднее арифметическое отрезков AC и AC_1 через a, а среднее гармоническое — через h, имеем:

$$h=\frac{g^2}{a},$$

т. е. **среднее гармоническое двух отрезков есть третье пропорциональное для среднего геометрического и среднего арифметического этих отрезков.**

В дальнейшем, когда будет пройдена метрическая зависимость между элементами прямоугольного треугольника, можно вернуться к этому вопросу и дать построение среднего гармонического двух отрезков m и n, несколько отличное от данного и более простое.

На рисунке 276 имеем:

a — среднее арифметическое отрезков m и n,

g — среднее геометрическое отрезков m и n,

h — среднее гармоническое отрезков m и n.

Ясно, что $h \leqq g \leqq a$; при $m = n$ имеем: $h = g = a$.

Известно, что биссектриса внутреннего угла треугольника и биссектриса внешнего угла, смежного с ним, образуют прямой угол, а потому треугольник ECE_1 — прямоугольный. Окружность, построенная на EE_1, как на диаметре (рис. 277), пройдет через точку C; прямые, проведенные из любой точки C_1 этой окружности к точкам E и E_1, образуют прямой угол EC_1E_1. Пропорция $\frac{E_1B}{E_1A} = \frac{EB}{EA}$ не изменяется, где бы ни находилась на окружности вершина C треугольника, следовательно C_1E — биссектриса угла AC_1B.

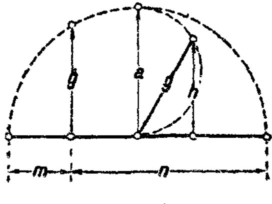


Рис. 276.

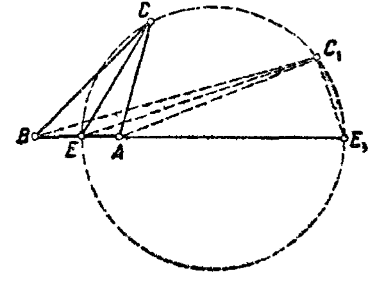


Рис. 277.

Таким образом, геометрическое место точек, расстояния которых до двух данных точек A и B находятся в данном отношении, есть окружность с диаметром EE_1, концами которого служат точки, делящие отрезок AB в данном отношении гармонически.

Такая окружность называется аполлониевой, по имени греческого математика Аполлония, жившего в Александрии приблизительно за 200 лет до нашей эры и занимавшегося этим построением.

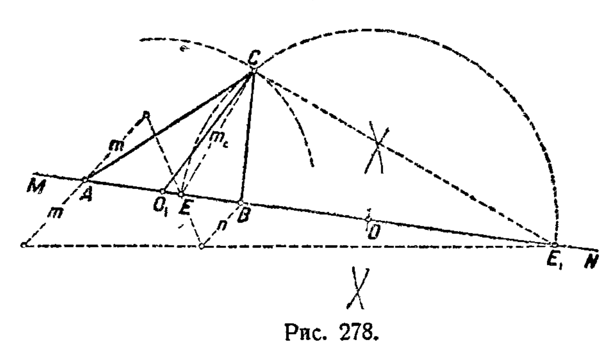


Рис. 278.

10. Пример решения задачи на построение с использованием окружности Аполлония.

Построить треугольник по следующим данным: c, $b : a = m : n$ и m_c.

Анализ. Допустим, что задача решена и треугольник ABC построен (рис. 278). Пусть CO_1 — медиана треугольника и $CA : CB = m : n$. Если провести биссектрису CE, то сторона $AB = c$ разделится в отношении $m : n$; если провести CE_1 перпендикулярно к CE, то на продолжении стороны AB получим точку E_1, для которой $E_1A : E_1B = m : n$. Принимая во внимание, что $\angle ECE_1 = 90°$, заключаем, что вершина C лежит на окружности диаметра EE_1 и на окружности с центром в точке O_1 радиуса $O_1C = m_c$.

Построение. На произвольной прямой MN откладываем отрезок $AB = c$ (рис. 278) и делим его внутренне в точке E и внешне в точке E_1 в отношении $m : n$. Тогда вершина C искомого треугольника будет лежать на окружности

диаметра EE_1, ибо расстояния от любой точки этой окружности до точек A и B относятся, как $m:n$. Затем проводим окружность радиусом, равным m_c, принимая за центр точку O_1, середину стороны AB, понятно, что вершина C треугольника должна лежать на этой окружности. Таким образом, вершина C треугольника принадлежит обоим геометрическим местам и, следовательно, является точкой их пересечения; соединив точку C с концами A и B отрезка AB, получим искомый треугольник ABC, удовлетворяющий условиям задачи.

Вторая точка пересечения обеих окружностей дает треугольник, симметрично равный треугольнику ABC.

Аналогично решаются задачи на построение треугольника по:
1) $c, a:b=m:n$ и h_c; 2) $b:c=m:n$, a и d и другие.

11. Пользуясь свойствами пучка лучей, пересекаемого параллелями, следует привести учащимся решение нескольких практических задач.

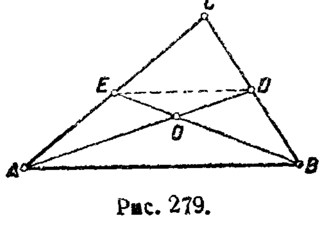


Рис. 279.

Предварительно, однако, рассмотрим еще раз теорему о пересечении медиан, доказав ее приемом, отличным от приведенного ранее доказательства.

Пусть BE и AD — медианы треугольника (рис. 279). Если соединить точки E и D, то

$$ED=\frac{1}{2}AB \quad \text{и} \quad ED \parallel AB,$$

а потому

$$\frac{AO}{OD}=\frac{AB}{ED}=\frac{2ED}{ED}=\frac{2}{1} \quad \text{и} \quad \frac{BO}{OE}=\frac{AB}{ED}=\frac{2ED}{ED}=\frac{2}{1},$$

т. е. медианы точкой их взаимного пересечения O делятся в отношении 2:1, считая от вершин углов. Это справедливо как для медиан AD и BE, так и для медианы, проведенной из вершины C; значит, третья медиана треугольника также проходит через точку O и все три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2:1, т. е. отсекают друг от друга одну треть, считая от стороны треугольника. Эта точка называется **центром тяжести** треугольника.

Доказанную теорему можно иллюстрировать опытом: вырезав из картона или фанеры произвольный треугольник, подвешивают его по очереди за каждую из его вершин и проводят на нем из вершин прямые, направление которых совпадает с вертикальным направлением. Учащиеся убеждаются, что так проведенные три прямые 1) пересекаются в одной точке, 2) отсекают друг от друга одну треть, считая от стороны, что проверяется измерением.

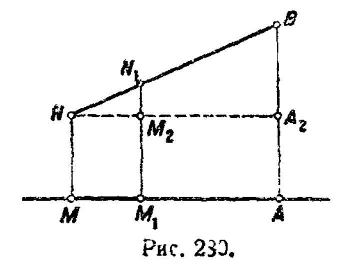


Рис. 280.

Задача: измерить высоту предмета AB, не измеряя его непосредственно.

Решение. Вбивают на некотором расстоянии от AB два кола так, чтобы концы их N и N_1 лежали на одной прямой с вершиной B предмета. Затем измеряют $MN=m$, $M_1N_1=n$, $MA=a$, $M_1A=b$ и вычисляют высоту $AB=x$ (рис. 280):

$$\frac{x-m}{n-m}=\frac{a}{a-b}, \quad \text{откуда} \quad x-m=\frac{a(n-m)}{a-b}$$

и

$$x=\frac{an-am}{a-b}+m=\frac{an-bm}{a-b}.$$

12. Следует время от времени предлагать учащимся материал на доказательство некоторых теорем, не рассмотренных на уроках и основанных на уже пройденном материале. Так, может быть предложена теорема:

диагонали трапеции делятся взаимно на части, пропорциональные основаниям.

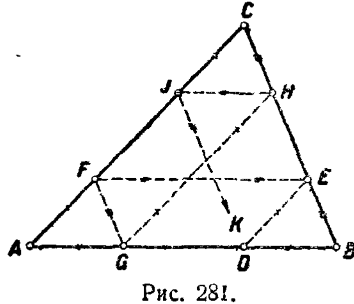


Рис. 281.

Можно рассмотреть с учащимися еще один весьма „занимательный" для них вопрос, решение которого обосновывается теорией пропорциональных отрезков, получаемых при пересечении сторон угла параллелями.

Возьмем в произвольном треугольнике ABC (рис. 281) на одной из его сторон, положим на стороне AB, где-либо точку D и проведем через нее прямую, параллельную одной из двух других сторон треугольника, положим AC, до пересечения с третьей стороной BC в точке E. Затем проводим через точку E прямую $EF \parallel AB$, далее — $FG \parallel CB$, $GH \parallel AC$, $HJ \parallel BA$ и, наконец, $JK \parallel CB$. Эта прямая JK, оказывается, пройдет через исходную точку D, так что ломаная $DEFGHJD$ замыкается.

В самом деле,

$$\frac{CA}{CJ}=\frac{CB}{CH}=\frac{CB}{EB}=\frac{BA}{BD}, \text{ ибо } CH=FG=EB.$$

Из пропорции $\frac{CA}{CJ}=\frac{BA}{BD}$ имеем:

$$\frac{CA-CJ}{CA}=\frac{BA-BD}{BA} \quad \text{или} \quad \frac{AJ}{CA}=\frac{AD}{BA},$$

а потому $JD \parallel CB$; но $JK \parallel CB$, а потому JK сливается с JD на основании аксиомы о параллельных.

Следует показать, что длина всей ломаной равна периметру треугольника; это вытекает из равенства противолежащих сторон параллелограмов. В самом деле,

$$DE=AF, \quad EF=GB, \quad FG=BE, \quad GH=FC, \quad HJ=AG, \quad JK=CE$$

и

$$DE+EF+FG+GH+HJ+JK=AF+GB+BE+FC+AG+CE=$$
$$=AC+AB+BC=2p.$$

Можно рассмотреть различные случаи положения точки D. Если точка D — середина стороны AB, то внутренняя ломаная состоит только из трех отрезков: отрезок DE сливается с отрезком GH, отрезок FG — с отрезком JD и отрезок JH — с отрезком FE, и, таким образом, периметр ломаной равен p. В предельном случае, когда точка D совпадает с какой-нибудь вершиной треугольника, например с его вершиной B, ломаная есть контур самого треугольника, и, следовательно, длина ее равна $2p$.

Можно взять точку D и на продолжении одной из сторон треугольника. В этом случае получится шестиугольник выпуклый, его пери-

метр больше периметра треугольника на сумму отрезков на продолжениях сторон треугольника за его вершины. Если точка D взята на продолжении стороны AB на расстоянии $BD=\frac{1}{2}AB$, то длина ломаной вдвое больше периметра данного треугольника.

Такого рода вопросы, конечно, следует скорее отнести к кружковой работе учащихся, так как для проработки их в классе нехватает времени.

§ 15. Подобие фигур.

Подобие фигур.

1. Переходя к третьему центральному вопросу — к подобию фигур, следует предварительно решить несколько практических вопросов.

1) На рисунке 282 дана схема камеры-обскуры. Лучи от предмета $MN=a$, проходя через отверстие F, дают изображение M_1N_1 на задней стенке камеры, где помещается светочувствительная пластинка. Допустим, что глубина камеры $FK_1=15$ *см*, а FK (расстояние от предмета до объектива) равно 3 *м*; тогда, если $MN \parallel M_1N_1$, то $\frac{FK}{FK_1}=\frac{MN}{M_1N_1}$, или, обозначив M_1N_1 через x, имеем: $\frac{300}{15}=\frac{a}{x}$, откуда $x=\frac{15a}{300}=\frac{a}{20}$, а это значит, что изображение предмета в 20 раз меньше самого предмета.

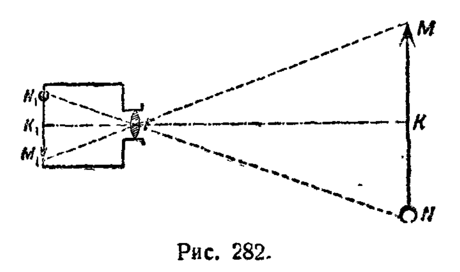


Рис. 282.

Необходимо указать учащимся, что отношения двух значений величины могут быть взяты только тогда, когда оба значения рассматриваемой величины выражены в одинаковых наименованиях; так, в приведенном выше примере нужно было предварительно раздробить 3 *м* в сантиметры.

Можно в связи с данной задачей рассмотреть вопрос:

На каком расстоянии от аппарата должен находиться человек, чтобы его рост — 175 *см* на пластинке размером 13×18 *см*² равнялся половине длины пластинки? Необходимо иметь в виду, что задача решается без учета преломления лучей.

Согласно приведенной выше формуле имеем:

$$\frac{x}{15}=\frac{175}{9}, \text{ откуда } x=\frac{175\cdot 15}{9}\approx 290 \text{ см} = 2{,}9 \text{ м}.$$

2) Для киносъемок обыкновенно пользуются камерой, глубина которой равна 6 *см*; ширина ленты равна 2,5 *см*; на экране ширина картины равна 3 *м*. На каком расстоянии сделан снимок?

Если обозначить искомое расстояние через x, то

$$x:6=300:2{,}5, \quad \text{откуда} \quad x=720 \text{ см}=7{,}2 \text{ м}.$$

Полученный результат указывает, что на таком именно расстоянии от экрана лучше всего смотреть картину в кинематографе, так как при

этом условии мы видим картину под тем же углом зрения, под каким она была снята. Этим отчасти объясняется, почему в кинематографе места, ближайшие к экрану, считаются „плохими".

Для самостоятельного решения учащимся может быть дана задача.

3) Фотографическая камера с небольшим булавочным отверстием при глубине камеры в 15 *см* дает высоту изображения в 8,1 *см*. На каком расстоянии от отверстия находится предмет, если его натуральная высота равна 10,8 *м*?

4) Указывается прием, которым пользуются в военном деле, когда требуется быстро и грубо приближенно определить расстояние от данного места до какого-либо предмета.

Глядя на большой палец D (рис. 283) в вертикальном его положении вытянутой вперед руки правым глазом B, закрыв другой, отмечают какую-нибудь точку предмета B_1; глядя затем одним левым глазом A, визируют другую точку A_1 предмета. Допуская, что расстояние AB между глазами параллельно A_1B_1, и зная, что расстояние AB примерно равно 6,5 *см*, а расстояние $AD = 65$ *см* (понятно, что для разных лиц это расстояние различно), находят, что $A_1D:A_1B_1 = 65:6,5 = 10$, т. е. расстояние предмета от наблюдателя приблизительно в 10 раз больше расстояния между точками A_1 и B_1. Основываясь на этом, может быть решена задача:

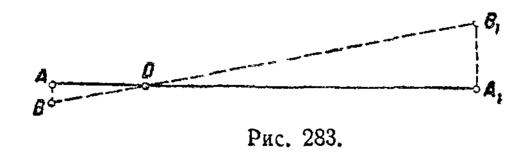


Рис. 283.

На каком примерно расстоянии от наблюдателя находится товарный поезд, если известно, что палец при визировании правым глазом покрывает левый край одного из вагонов, а при визировании левым глазом — правый край того же вагона; длина вагона известна, она равна 7,6 *м*.

Расстояние A_1B_1 определяется на-глаз; необходимо приучаться определять небольшие расстояния на-глаз; расстояние же AD должно быть известно каждому наблюдателю для своей руки. В приведенном примере расстояние от наблюдателя до поезда равно грубо приближенно 76 *м*. Разумеется, не будет грубой ошибки, если округлить это число и принять его равным 80 *м*; ведь такое определение расстояния — грубо приближенное, а потому разница в несколько метров не имеет существенного значения.

2. Учащиеся умеют строить фигуру — треугольник, квадрат, параллелограм и т. д., равную данной, по достаточному числу заданных независимых элементов. Нередко приходится вычерчивать фигуру, меньшую или бо́льшую данной, но одинакового вида, одинаковой с ней формы. Примером может служить уменьшение большой картины с помощью фотографии или увеличение оригинала с помощью волшебного фонаря или микроскопа.

Когда архитектор дает план строения, он, разумеется, вычерчивает его не в натуральную величину; он дает план в уменьшенном масштабе,

сохраняя неизменными углы между прямыми, уменьшая все отрезки в одинаковое число раз, например в 100 раз против действительных их размеров. Так, на рисунках 284 и 285 один из домиков уменьшен по сравнению с другим в масштабе 2:3; величина всех углов сохранена, она не зависит от длины сторон. Если бы, например, угол между скатами крыши был в одном случае больше, чем в другом, то исчезло бы впечатление того, что они похожи друг на друга, или, как говорят в геометрии, что они подобны.

Рис. 284.

Следует показать учащимся план какой-нибудь местности или какого-нибудь здания или комнаты и тот же план в уменьшенном виде, чтобы они „видели" равенство соответственных углов обоих планов, а также сокращение линейных размеров, имеющее место на меньшем плане.

Рис. 285.

При переходе к изучению подобных фигур могут быть избраны два пути: или сперва рассматривают подобные треугольники, а затем — подобные многоугольники, или от рассмотрения подобных многоугольников переходят к подобным треугольникам.

Первый путь более приемлем, потому что, пользуясь им, совершают переход от более простого к более сложному, но зато в дальнейшем учащимся труднее уяснить себе сущность подобия многоугольников, так как для подобия треугольников достаточно наличия или пропорциональности сторон или одного лишь равенства их углов.

Следует, как нам кажется, придерживаться второго пути, так как в данном случае учащиеся лучше уяснят себе сущность и значение подобия треугольников и необходимые два условия подобия многоугольников; последние подобны, если соответственные углы равны и соответственные стороны пропорциональны, треугольники же подобны при одном условии: если углы равны или соответственные стороны пропорциональны. В последнем случае одно условие является следствием другого. В этом — основное значение подобия треугольников.

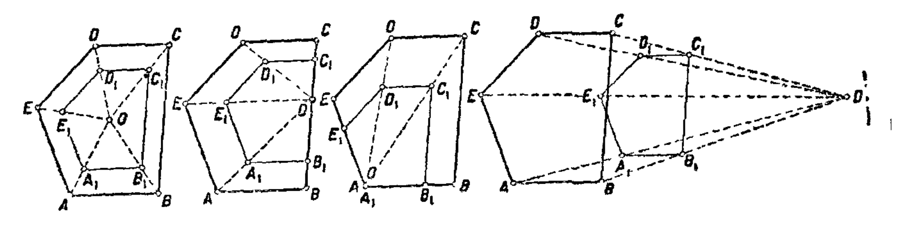


Рис. 286.

3. Учащимся предлагается начертить какой-нибудь многоугольник, положим пятиугольник, выбрать на плоскости чертежа произвольную точку O и соединить ее со всеми вершинами многоугольника. Точка может быть взята внутри контура многоугольника, на одной из его сторон или в одной из его вершин, или же вне его (рис. 286); суть дела от этого не изменится.

Взяв произвольную точку A_1 на одном из лучей, положим на луче OA, проводим $A_1B_1 \parallel AB$, затем $B_1C_1 \parallel BC$, $C_1D_1 \parallel CD$ и т. д. Необходимо показать, что получившаяся фигура $A_1B_1C_1D_1E_1$ ограничена замкнутой ломаной и является также пятиугольником.

Начальная и конечная точки ломаной $A_1B_1C_1D_1E_1A_1$ совпадают на основании обратной теоремы о двух прямых, исходящих из одной точки и пересекаемых параллельными прямыми. В самом деле,

из треугольника AOB следует: $\frac{OA}{OA_1}=\frac{OB}{OB_1}$

» » BOC » $\frac{OB}{OB_1}=\frac{OC}{OC_1}$

. . . .

. . . .

» » EOD » $\frac{OD}{OD_1}=\frac{OE}{OE_1}$,

значит,

$$\frac{OA}{OA_1}=\frac{OB}{OB_1}=\frac{OC}{OC_1}=\ldots=\frac{OD}{OD_1}=\frac{OE}{OE_1},$$

а потому $\frac{OA}{OA_1}=\frac{OE}{OE_1}$, и, следовательно, $E_1A_1 \parallel EA$.

Рассматривая многоугольники $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$, мы видим, что углы их по порядку равны: $\angle ABC=\angle A_1B_1C_1$, $\angle BCD=\angle B_1C_1D_1$ и т. д., и прилежащие к углам стороны обоих многоугольников пропорциональны.

Углы многоугольников, лежащие между пропорциональными сторонами, называются соответственными, и стороны многоугольников, прилежащие к равным углам, называются соответственными.

В обоих многоугольниках:

1) прямые, соединяющие вершины соответственно равных углов, пересекаются в одной точке O;

2) соответственные стороны параллельны;

3) соответственные стороны пропорциональны;

4) соответственные углы равны.

Такие два многоугольника называются подобными и подобно расположенными (гомотетичными); подобие обозначается знаком $\sim$, так что $ABCDE \sim A_1B_1C_1D_1E_1$.

Точка O, в которой пересекаются прямые, проходящие через соответственные вершины подобных и подобно расположенных многоугольников, т. е. через вершины равных углов, называется центром подобия.

Если повернуть один из многоугольников вокруг центра подобия O на некоторый угол в его плоскости, то первые два из приведенных условий отпадают, и действительны только условия 3 и 4.

Обратно — если даны два многоугольника, для которых существуют условия 3 и 4, то всегда их можно привести в положение подобно расположенных многоугольников, и тогда имеют место и условия 1 и 2. Учащиеся должны уметь привести два подобных многоугольника в подобное положение для данного центра подобия.

Пусть в данных многоугольниках $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. 287) $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1 \ldots$ и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1}$. Требуется привести обе фигуры в подобное расположение относительно центра подобия O.

Соединим точку O с вершинами A, B, C, D и E многоугольника $ABCDE$ и построим на стороне A_1B_1 в концах ее A_1 и B_1 углы $O_1A_1B_1$ и $O_1B_1A_1$, и тогда $\triangle O_1A_1B_1 \backsim \triangle OAB$. Отложив затем на стороне OA отрезок $OA_2 = O_1A_1$, проводим $A_2B_2 \parallel AB$, и тогда $A_2B_2 = A_1B_1$ и $\triangle OA_2B_2 = \triangle O_1A_1B_1$. Если далее провести $B_2C_2 \parallel BC$, $C_2D_2 \parallel CD$ и т. д., то многоугольник $A_2B_2C_2D_2E_2 \backsim ABCDE$.

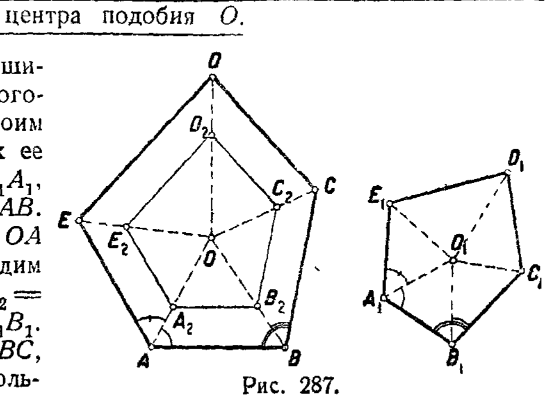


Рис. 287.

Нетрудно показать, что мн-к $A_2B_2C_2D_2E_2 =$ мн-ку $A_1B_1C_1D_1E_1$. В самом деле, $\angle A_2B_2C_2 = \angle ABC = \angle A_1B_1C_1$; $\angle B_2C_2D_2 = \angle BCD = \angle B_1C_1D_1$ и т. д. Но $A_2B_2 = A_1B_1$ и $\frac{BC}{B_2C_2} = \frac{AB}{A_2B_2} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$, откуда $B_2C_2 = B_1C_1$ и т. д. Значит, мн-к $A_2B_2C_2D_2E_2 =$ мн-ку $A_1B_1C_1D_1E_1$, и условия 1 и 2 соблюдены, многоугольники подобно расположены.

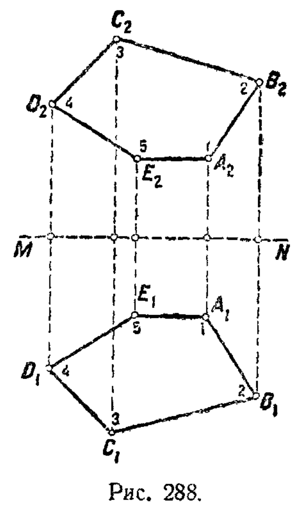


Рис. 288.

Таким же образом можно доказать, что многоугольники могут быть подобно расположены и в том случае, когда центр подобия дан вне многоугольника, в вершине его или на одной из его сторон. Случаи эти желательно проработать с учащимися.

Следует указать, что возможен и случай, когда углы второго многоугольника расположены в порядке, противоположном порядку углов первого.

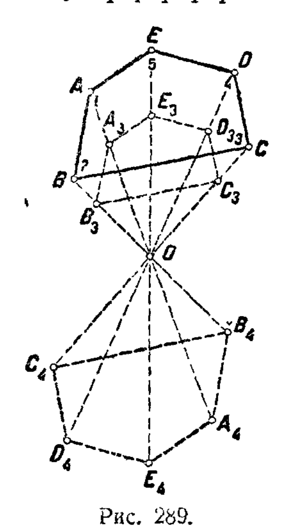


Рис. 289.

Так, если даны многоугольники $A_1B_1C_1D_1E_1$ и $A_2B_2C_2D_2E_2$, для которых существуют условия 3 и 4, и требуется привести их в подобное расположение, то можно сперва построить многоугольник, симметрично равный одному из данных многоугольников (рис. 288), и уже затем поступать по предыдущему. Можно было бы выполнить это построение на продолжениях лучей за центр подобия (рис. 289).

Таким образом, два одноименных многоугольника подобны, если их соответственные углы по порядку равны и соответственные их стороны пропорциональны.

Отношение соответственных сторон для двух данных подобных многоугольников есть величина постоянная и называется коэфициентом подобия.

Соответственные стороны иначе называют иногда сходственными.

Прямые, проходящие через вершины соответственно равных углов подобных и подобно расположенных многоугольников, называются лучами подобия.

Если центр подобия двух фигур лежит вне отрезка AA_1 луча подобия, проходящего через две соответственные вершины, то центр подобия называется внешним, если же центр подобия лежит на отрезке AA_1 между соответственными вершинами A и A_1, то центр подобия называется внутренним.

4. После рассмотрения вопроса о подобии многоугольников и выяснения тех двух условий, которые необходимы и достаточны для их подобия, следует перейти к вопросу о подобии треугольников, придерживаясь при изложении обычного порядка, принятого в большинстве учебников. Дается определение подобия треугольников:

Два треугольника называются подобными, если сходственные стороны их пропорциональны и соответственные углы равны, и рассматривается теорема:

Прямая, параллельная стороне данного треугольника и пересекающая две его стороны, отсекает от него треугольник, подобный данному.

Теорема эта непосредственно вытекает из свойства лучей, пересекаемых параллелями.

Вывод признаков подобия обычный: даны два треугольника, ABC и $A_1B_1C_1$, углы которых равны; откладывают на AB отрезок $AB_2 = A_1B_1$, проводят $B_2C_2 \parallel BC$, тогда $\triangle AB_2C_2 \backsim \triangle ABC$; доказав, что $AB_2C_2 = A_1B_1C_1$, имеем $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$. Итак:

1) **Два треугольника подобны, если углы одного равны соответственным углам другого.**

2) **Два треугольника подобны, если две стороны одного пропорциональны двум сторонам другого и углы между ними равны.**

3) **Два треугольника подобны, если стороны одного пропорциональны сходственным сторонам другого.**

4) **Два треугольника подобны, если две стороны одного пропорциональны двум сторонам другого и углы, лежащие против бо́льших из двух сторон, равны.**

Первым и третьим признаками подобия подчеркивается, что для подобия треугольников достаточно или равенство углов, или пропорциональность сторон, ибо одно из условий влечет за собой другое как следствие.

Последний признак подобия следует рассматривать с учащимися только в том случае, если рассмотрен четвертый признак равенства треугольников по двум сторонам и углу, лежащему против бо́льшей из них.

Из всех признаков подобия треугольников главное внимание должно быть уделено первому признаку, а именно — подобию треугольников по двум равным углам, так как при решении различных вопросов наиболее часто приходится пользоваться этим признаком; сравнительно

реже приходится пользоваться признаком подобия по двум соответственно пропорциональным сторонам и углу между ними или углу, лежащему против бо́льшей из сторон; третьим признаком приходится пользоваться в чертежной практике при построении планов и вычерчивании их в определенном масштабе.

К приведенным выше четырем признакам подобия треугольников можно присоединить еще следующие два признака: **два треугольника подобны, если стороны одного параллельны или перпендикулярны сторонам другого треугольника.** Справедливость данных признаков вытекает из того, что треугольники с соответственно параллельными или перпендикулярными сторонами равноугольны.

Учащиеся должны знать, что при коэфициенте пропорциональности $k=1$ подобие фигур превращается в их равенство и что равенство фигур, таким образом, есть особый случай подобия.

Следует сопоставить признаки подобия и равенства треугольников; такое сопоставление содействует лучшему уяснению учащимися как тех, так и других признаков.

Треугольники равны, если:	Треугольники подобны, если:
1) сторона и два прилежащих к ней угла одного равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника;	1) два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника;
2) две стороны одного треугольника равны двум сторонам другого и углы между равными сторонами равны;	2) две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и углы между пропорциональными сторонами равны;
3) три стороны одного равны трем сторонам другого;	3) три стороны одного пропорциональны трем сторонам другого;
4) две стороны и угол, лежащий против бо́льшей из них одного треугольника, равны соответственным элементам другого треугольника.	4) две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и углы, лежащие против бо́льших сторон, равны.

5. Рассмотрение каждого из признаков подобия следует сопровождать решением задач, чтобы учащиеся научились пользоваться тем или иным признаком подобия и умели правильно вести запись решения. Нужно приучать учащихся, во избежание возможных ошибок, сперва писать отношение двух сторон одного треугольника, а затем уже — отношение двух сходственных сторон второго треугольника, четко отмечать на рисунке равные углы подобных треугольников, чтобы тем самым легче было находить сходственные их стороны.

6. Примеры задач.

1) Дан треугольник ABC; построить подобный ему треугольник, если известно, что сторона последнего, сходственная стороне AB, равна c_1.

Отложим на AB от точки A отрезок $AB_2 = c_1$ (рис. 290), проведем $B_2B_3 \parallel AC$ и $B_3A_3 \parallel BA$, тогда $\triangle A_3B_3C \sim \triangle ABC$.

Возможно и иное решение.

Отложив $BA_2 = c_1$ на BA от B, проводим $A_2C_2 \parallel AC$, тогда $\triangle A_2BC_2 \sim \triangle ABC$.

2) Стороны треугольника $a = 4{,}0$ *см*, $b = 12$ *см* и $c = 15$ *см*; меньшая сторона подобного ему треугольника $a_1 = 6{,}0$ *см*. Найти остальные стороны.

Находится коэфициент подобия $k = \frac{a_1}{a} = \frac{6}{4} = 1{,}5$; тогда $b_1 = 12k = 12 \cdot 1{,}5 = 18$ *см* и $c_1 = 15\,k = 22{,}5$ *см*.

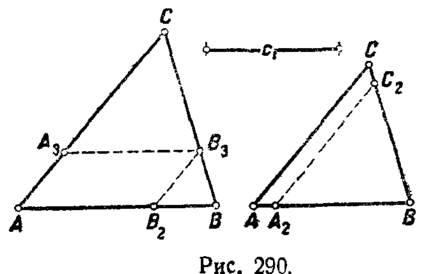


Рис. 290.

3) Равносторонний треугольник, сторона которого $a = 0{,}1$ *мм*, рассматривается под микроскопом, дающим увеличение в 40 раз. Во сколько раз увеличится угол треугольника?

Вопрос этот ставится исключительно с целью фиксировать внимание учащихся на том, что в подобных треугольниках и в многоугольниках вообще соответственные углы равны. Хотя стороны треугольника под микроскопом и увеличились в 40 раз, углы треугольника не изменили своей величины.

4) Углы квадрата и прямоугольника равны каждый 90°. Подобны ли эти четырехугольники?

5) Стороны квадрата и ромба пропорциональны. Подобны ли эти четырехугольники?

Постановкой первого вопроса подчеркивается, что для подобия четырехугольников недостаточно одного условия, что углы равны, необходимо еще одно условие, а именно — пропорциональность сходственных сторон четырехугольников; следовательно, квадрат и прямоугольник, вообще говоря, неподобны; но если прямоугольник равносторонний, т. е. квадрат, то они подобны. То же относится и ко второму вопросу; квадрат и ромб, вообще говоря, неподобны, ибо их углы неравны, но если ромб прямоугольный, то они подобны.

Могут быть заданы вопросы: 1) подобны ли два квадрата или 2) подобны ли два ромба.

Понятно, два квадрата всегда подобны, но два ромба подобны только в том случае, если они имеют по равному углу.

6) Стороны двух треугольников попарно взаимно параллельны или взаимно перпендикулярны; подобны ли треугольники?

- Да, они подобны, ибо они равноугольны.

Если A, B и C — углы одного треугольника, а A_1, B_1 и C_1 — углы другого, то углы эти — A и A_1, B и B_1, C и C_1 при заданном условии задачи или равны или пополнительные. Если они равны, то треугольники подобны.

Попарно пополнительными все три угла не могут быть. В самом деле, если бы

$$A + A_1 = 2d, \quad B + B_1 = 2d \text{ и } C + C_1 = 2d,$$

то сумма углов обоих треугольников равнялась бы $6d$, что невозможно, так как сумма углов двух треугольников равна $4d$, а потому возможность такого случая отпадает. Если бы

$$A = A_1, \quad B + B_1 = 2d \text{ и } C + C_1 = 2d,$$

то сумма углов обоих треугольников оказалась бы больше $4d$, и возможность такого случая также исключается.

Если, наконец,

$$A = A_1, \quad B = B_1 \text{ и } C + C_1 = 2d,$$

то равенство двух углов одного треугольника двум углам другого влечет за собою и равенство третьих углов треугольников, и $\angle C$ должен быть равен $\angle C_1$, а в таком случае треугольники равноугольны и, следовательно, подобны.

Остается еще ответить на вопрос, может ли быть справедливо равенство $C + C_1 = 2d$ при наличии равенства $C = C_1$. Конечно, это возможно, если $C = C_1 = d$, т. е. если треугольники прямоугольные.

7) Основания трапеции равны a и b, где $a > b$ и $\angle ADC$ — тупой; одна из диагоналей AC делит трапецию на два подобных треугольника. Найти длину этой диагонали.

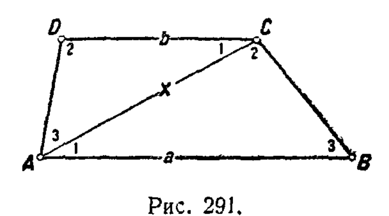


Рис. 291.

Согласно условию, $\triangle ADC \backsim \triangle ACB$ (рис. 291). Чтобы найти общую сторону x обоих треугольников, следует рассмотреть, какие из их углов соответственны. Так, $\angle DCA = \angle CAB$ как внутренние накрест лежащие; $\angle D$ — тупой угол, он не может равняться углу B и должен равняться углу ACB, а потому $\angle DAC = \angle B$.

Из треугольника ADC берем отношение сторон b и x и из треугольника ACB — отношение сходственных сторон. Чтобы показать, какие стороны соответственны, можно вести такую запись:

$$\triangle ADC \backsim \triangle ACB,$$

$$b \leftrightarrow \angle 3 \leftrightarrow x, \quad x \leftrightarrow \angle 2 \leftrightarrow a,$$

где значок $\leftrightarrow$ в записи заменяет слова: „лежит против"; следовательно, $\frac{b}{x} = \frac{x}{a}$, откуда $x^2 = ab$ и $x = \sqrt{ab}$. Значит, диагональ $x = \sqrt{ab}$, т. е. она равна среднему пропорциональному оснований трапеции.

8) Два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны каждый порознь треугольнику ABC. Доказать, что $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2$.

Дано: $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$ и $\triangle A_2B_2C_2 \backsim \triangle ABC$.
Треб. док.: $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2$.

Доказательство. Если $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$, то углы этих треугольников равны, также если $\triangle A_2B_2C_2 \backsim \triangle ABC$, то и их углы равны, следовательно углы треугольников и $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны, а потому треугольники подобны:

$$\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2.$$

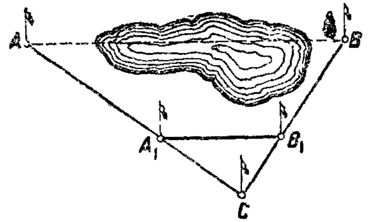


Рис. 292.

9) Найти расстояние между двумя пунктами A и B, между которыми нельзя провешить прямую.

Из удобной точки C провешиваем $CA = b$ и $CB = a$ (рис. 292). От точки C отложим на CA расстояние $CA_1 = \frac{b}{n}$ и на CB — расстояние $CB_1 = \frac{a}{n}$; тогда $A_1B_1 = \frac{1}{n} AB$; измерив $A_1B_1 = m$, находим $AB = m \cdot n$.

7. Область применения теории подобия фигур весьма обширна и разнообразна. Следует применить признаки подобия треугольников к прямоугольным, равнобедренным и равносторонним треугольникам.

Необходимо давать для самостоятельного доказательства учащимся и для домашней работы теоремы: в подобных треугольниках сходст-

венные высоты, сходственные медианы и биссектрисы, радиус вписанных и описанных, а также радиусы соответственных приписанных окружностей, и вообще отрезки, соответственно расположенные, пропорциональны соответственным сторонам треугольников; последнюю теорему целесообразно разобрать в классе. Надо также рассмотреть следствия, вытекающие из основных теорем подобия треугольников.

Периметры подобных треугольников и многоугольников пропорциональны сходственным сторонам.

Надо показать учащимся вывод этого следствия. Обозначив стороны одного из двух подобных многоугольников через a_1, b_1, c_1, d_1..., другого — через a_2, b_2, c_2, d_2 ... и коэфициент подобия через k, имеем:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}=\ldots=k,$$

отсюда

$$a_1=ka_2,\quad b_1=kb_2,\quad c_1=kc_2,\quad d_1=kd_2\ldots$$

Суммируя почленно последние равенства, получаем:

$$a_1+b_1+c_1+d_1+\ldots=k(a_2+b_2+c_2+d_2+\ldots),$$

откуда

$$\frac{a_1+b_1+c_1+d_1+\ldots}{a_2+b_2+c_2+d_2+\ldots}=k=\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\ldots$$

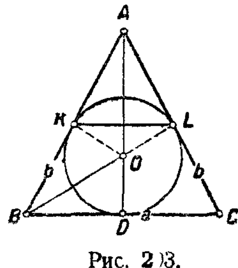


Рис. 293.

Следует обратить внимание учащихся на то, что полученное равенство можно сформулировать еще иначе:

если дан ряд равных отношений, то сумма всех предыдущих членов относится к сумме всех последующих членов, как один из предыдущих относится к своему последующему.

При решении задач вычислительного характера следует, как правило, давать решение в общем виде, пользуясь буквенным обозначением длины данных отрезков.

Приводим решение нескольких задач:

В равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна 100 *дм*, а основание равно 60 *дм*, вписана окружность; определить расстояние между точками касания, находящимися на боковых сторонах треугольника. Задача № 53 из § 9 (Рыбкин, Сборник задач по геометрии, ч. I, 1933 г.).

Обозначаем боковую сторону треугольника через b, основание через a и решаем задачу в общем виде.

Построив равнобедренный треугольник ABC (рис. 293) и вписав в него окружность, соединяем точки касания K и L хордой KL. Обозначив длину ее через x, следует затем отыскать подобные треугольники. Такими треугольниками являются ABC и AKL, так как две стороны их пропорциональны: $\frac{AB}{AK}=\frac{AC}{AL}$ и угол A между ними

общий: $AK = AL$ и $KB = LC = BD = DC$. Из подобия треугольников следует, что $\frac{BC}{AC} = \frac{KL}{AL}$ или $\frac{a}{b} = \frac{x}{b - \frac{a}{2}}$, откуда $x = \frac{a(2b - a)}{2b}$; подставляя данные значения $a = 60$ и $b = 100$, находим:

$$x = \frac{60(200 - 60)}{200} = \frac{60 \cdot 140}{200} = 42 \text{ дм.}$$

Преподаватель может предложить учащимся предварительно построить равнобедренный треугольник по основанию и боковой стороне и вписать в него окружность, а затем уже решить задачу. Этого и следовало бы придерживаться при решении любой задачи по геометрии, но за недостатком времени приходится в некоторых наиболее простых случаях от построения отказываться, допуская, что требуемая фигура уже построена, дав лишь схематический чертеж фигуры от руки.

Решим еще одну задачу из Рыбкина (№ 58, § 9):

Наибольшие стороны двух подобных многоугольников a_1 и a_2, где $a_1 < a_2$, а разность их периметров равна m. Найти периметры.

Обозначив периметр меньшего многоугольника через p_1, а большего через $p_1 + m$, учащиеся запишут, что

$$\frac{p_1}{p_1 + m} = \frac{a_1}{a_2}, \quad \text{откуда} \quad p_1 = \frac{ma_1}{a_2 - a_1},$$

и, быть может, по аналогии напишут, что периметр p_2 второго многоугольника равен $\frac{ma_2}{a_2 - a_1}$; если же они не догадаются это сделать, то надо вычислить периметр так: $p_2 = p_1 + m = \frac{ma_1}{a_2 - a_1} + m = \frac{ma_2}{a_2 - a_1}$ и потом указать на одинаковую структуру полученных выражений периметров. В этой задаче можно обойтись и без точного построения.

Рассмотрим, наконец, еще задачу № 32, § 9 того же сборника, которую мы сформулируем так:

Дан треугольник ABC; вписать в него ромб $ADEF$ так, чтобы угол A у них был общий, а вершина E находилась на стороне BC; вычислить сторону ромба, если известно, что сторона $AB = c$ и сторона $AC = b$.

Построив какой-нибудь произвольной формы треугольник со сторонами b и c, требуется вписать в него ромб, угол которого совпадает с углом A. Анализ задачи показывает, что AE — диагональ ромба, а потому она делит угол A пополам. Таким образом, задача сводится к построению биссектрисы AE угла A; проведя затем $ED \parallel CA$ и $EF \parallel BA$, получаем ромб $ADEF$. Можно рассмотреть три случая: 1) $\angle A < 90°$; 2) $\angle A = 90°$ и 3) $\angle A > 90°$. Обозначив сторону ромба через x, имеем из подобия треугольников ABC и DBE:

$$\frac{b}{c} = \frac{x}{c - x}, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{bc}{b + c}.$$

Ниже приводятся примеры задач на построение, решаемых так называемым **методом подобия**, основанным на подобии фигур.

8. Примеры задач на построение, решаемых методом подобия.

1) В данный треугольник ABC вписать квадрат так, чтобы две его вершины лежали на большей стороне треугольника, а две другие — на двух других его сторонах.

Пусть какой-нибудь квадрат $DEFG$ (рис. 294) двумя своими вершинами D и E лежит на большей стороне AB треугольника ABC, третья же его вершина G пусть лежит на стороне AC. Если перемещать сторону GD квадрата параллельно самой себе и одновременно увеличивать или уменьшать ее с тем, чтобы точка G, вершина квадрата, оставалась на стороне AC, а точка D, другая вершина квадрата, — на стороне AB, то сторона DE будет скользить по стороне AB, вершина же F будет перемещаться по прямой AF, выходящей из вершины A и проходящей через точку F. Последнее вытекает из подобия треугольников или из обратной теоремы о пучке лучей, выходящих из одной точки, в данном случае — из точки A, и пересекаемых рядом параллелей.

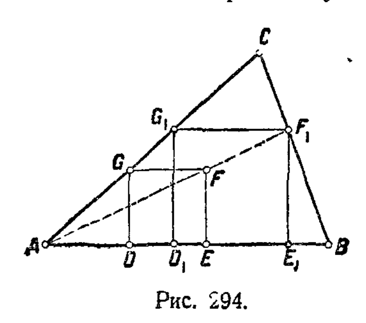


Рис. 294.

Исходя из анализа, мы следующим образом выполняем построение искомого квадрата: строим квадрат $DEFG$ (рис. 294) согласно данным выше указаниям и проводим из вершины A прямую до пересечения ее в точке F_1 со стороною BC. Проведя затем $F_1E_1 \perp AB$, $F_1G_1 \parallel AB$ и $G_1D_1 \perp AB$, получим искомый квадрат $D_1E_1F_1G_1$.

Действительно: $$\frac{E_1F_1}{AF_1}=\frac{FE}{AF} \text{ и } \frac{G_1F_1}{AF_1}=\frac{GF}{AF},$$

но $FE = GF$, а потому правые части равенств равны и

$$\frac{E_1F_1}{AF_1}=\frac{G_1F_1}{AF_1},$$

откуда $E_1F_1 = G_1F_1$, а потому прямоугольник $D_1E_1F_1G_1$, у которого смежные стороны равны, — квадрат.

Задача всегда возможна и имеет одно решение.

Если бы в условии задачи не было указано, что две вершины квадрата должны лежать на большей стороне треугольника, то в тупоугольном треугольнике из двух вершин квадрата, которые должны лежать на одной стороне треугольника, обе будут лежать или на продолжении этой стороны или же одна из вершин квадрата — на самой стороне, а другая — на продолжении стороны треугольника, в чем легко убедиться, сделав чертеж.

2) Дана окружность и два ее радиуса, образующие угол, меньший 180°. Провести хорду, которая этими радиусами делится на три равные части.

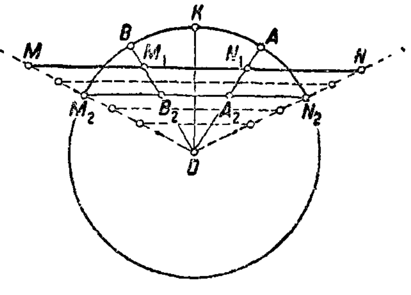


Рис. 295.

Прежде всего, заметим, что искомая хорда должна быть перпендикулярна к биссектрисе OK угла AOB, так как только в этом случае отрезки хорды, лежащие вне угла AOB, будут равны.

Проводим прямую $MN \perp OK$ (рис. 295); она пересечет радиусы OA и OB (или их продолжения) в точках N_1 и M_1. Понятно, что необходимо затем перемещать хорду MN параллельно самой себе до тех пор, пока отрезки хорды не окажутся равными.

Отложим $N_1N = M_1N_1 = M_1M$. При параллельном перемещении всего отрезка MN необходимо, чтобы построенные три отрезка, уменьшаясь, оставались

все время равными друг другу, т. е. чтобы они уменьшались в одном и том же отношении. Отсюда следует, что точки M и N должны перемещаться по OM и ON, т. е. по направлениям радиусов, проведенных через точки M и N, и хорда M_2N_2 — искомая хорда.

Построение ясно из чертежа. Порядок построения: а) $MN \perp OK$, б) $NN_1 = M_1N_1$ и $M_1M = M_1N_1$, в) ON и OM, г) M_2N_2.

На основании теоремы о пучке лучей имеем:

$$\frac{MM_1}{M_2B_2} = \frac{M_1O}{B_2O} = \frac{M_1N_1}{B_2A_2} = \frac{N_1O}{A_2O} = \frac{N_1N}{A_2N_2}; \quad \text{но} \quad MM_1 = M_1N_1 = N_1N,$$

а потому $M_2B_2 = B_2A_2 = A_2N_2$

Обе приведенные задачи решены параллельным перемещением; использовано свойство пучка лучей, пересекаемого параллельными прямыми.

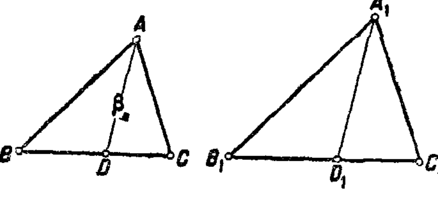


Рис. 296.

3) Построить треугольник по следующим данным: b, c и β_A, т. е. по двум сторонам и биссектрисе угла между ними ($b \neq c$).

Анализ. Пусть треугольник $A_1B_1C_1$ подобен искомому ABC (рис. 296).

В нем A_1D_1 — биссектриса и $\frac{A_1B_1}{A_1C_1} = \frac{c}{b}$. Следовательно, приняв произвольный отрезок, например B_1C_1, за сторону треугольника, находим на нем точку D_1, разделив отрезок B_1C_1 на части, пропорциональные c и b, т. е. $B_1D_1 : D_1C_1 = c : b$. Но $\frac{A_1B_1}{A_1D_1} = \frac{c}{\beta_A}$, а потому вершина A_1 треугольника $B_1A_1D_1$ должна лежать на аполлониевой окружности, концами диаметра которой служат точки, в которых B_1D_1 делится внутренне и внешне в отношении $c : \beta_A$.

В то же время $A_1D_1 : A_1C_1 = \beta_A : b$, и вершина A_1 треугольника $D_1A_1C_1$ лежит на аполлониевой окружности; концами диаметра ее будут точки, в которых D_1C_1 делится внутренне и внешне в отношении $\beta_A : b$; значит, вершина A_1 принадлежит двум геометрическим местам и треугольник $A_1B_1C_1$ построить можно. Отложив затем на A_1B_1 от точки A_1 отрезок A_1B_1, равный c, и проведя $BC \parallel B_1C_1$, получим искомый треугольник ABC. Вершина его A совпадает с вершиной A_1.

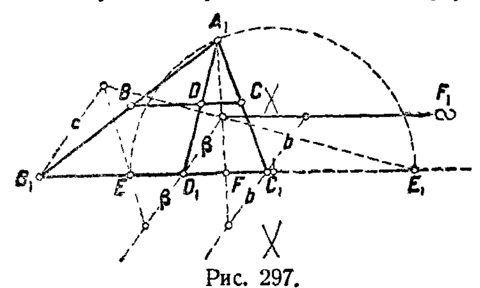


Рис. 297.

Построение: а) строится произвольный отрезок B_1C_1 (рис. 297); б) находится точка D_1, в которой B_1C_1 делится в отношении $c : b$; в) находятся точки E и E_1, в которых B_1D_1 внутренне и внешне делится в отношении $c : \beta_A$; г) строится окружность диаметра EE_1 — аполлониева окружность, на которой должна лежать вершина A_1; д) находятся точки F и F_1, в которых C_1D_1 внутренне и внешне делится в отношении $\beta_A : b$; на FF_1 как на диаметре строится вторая аполлониева окружность, которая пересекает первую в точке A_1 — вершине искомого тр-ка; если F_1 уходит в бесконечность, то $\beta_A = b$, и потому мы имеем только одну точку F, и вершина треугольника должна лежать на $FA_1 \perp D_1C_1$; е) соединяют точку A_1 пересечения окружности и прямой FA_1 с точками B_1 и C_1 и получают треугольник $A_1B_1C_1$, подобный искомому; ж) откладывают от точки B_1 на A_1B_1 отрезок $A_1B_1 = AB = c$ и проводят $BC \parallel B_1C_1$. Искомый треугольник $A_1BC = ABC$, ибо вершины их A и A_1 совпадают.

Доказательство. $\triangle A_1BC \sim \triangle A_1B_1C_1$ и $AB = c$; но $\frac{A_1B_1}{A_1C_1} = \frac{c}{b} = \frac{AB}{A_1C}$, значит $A_1C = b$; A_1D — биссектриса, так как $BD : DC = B_1D_1 : D_1C_1 = c : b$; $\frac{A_1B_1}{A_1D_1} = \frac{c}{\beta_A} = \frac{A_1B}{A_1D} = \frac{c}{A_1D}$, значит $A_1D = \beta_A$ и треугольник A_1BC — искомый.

Исследование. Если $\beta_A = h_a$, то треугольник ABC — равнобедренный и задача имеет одно решение.

Если $\beta_A < h_a$, то задача решений не имеет. Задача возможна, если $\beta_A < \frac{b+c}{2}$.

Условие это вытекает из следующего. Как известно, $\beta_A^2 = bc - n_b \cdot n_c$ (I), где n_b и n_c — отрезки стороны BC, на которые ее делит биссектриса β_A. Из (I) следует, что $\beta_A^2 < bc$ или $\beta_A < \sqrt{bc}$; но $\sqrt{bc} < \frac{b+c}{2}$, а потому $\beta_A < \frac{b+c}{2}$. Ввиду того что теорема о квадрате биссектрисы рассматривается обычно позже, можно данную задачу отнести к разделу „Метрические соотношения между элементами треугольника" или ограничиться указанием, что β_A должна быть меньше среднего арифметического сторон b и c треугольника.

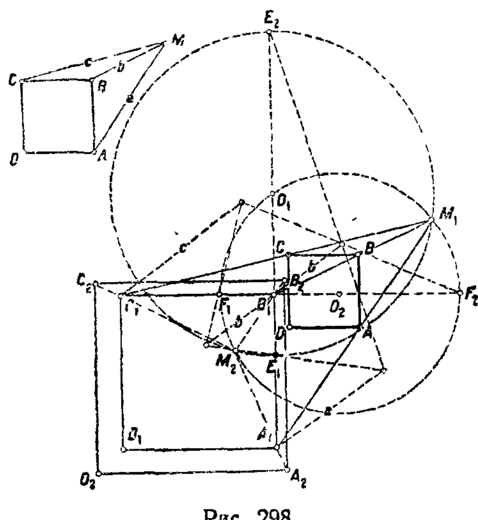


Рис. 298.

4) Построить квадрат так, чтобы три его вершины отстояли от данной точки M соответственно на расстоянии a, b и c.

Строим произвольный квадрат $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 298). Делим затем A_1B_1 внешне и внутренне в отношении $a:b$ в точках E_1 и E_2 и строим на E_1E_2 как на диаметре окружность O_1; далее делим B_1C_1 внутренне и внешне в отношении $b:c$ в точках F_1 и F_2 и строим на F_1F_2 как на диаметре окружность O_2; аполлониевы окружности пересекаются в точках M_1 и M_2. В таком случае

$$M_1C_1 : M_1B_1 = c : b \quad \text{и} \quad M_1B_1 : M_1A_1 = b : a.$$

Точно так же

$$\frac{M_2A_1}{M_2B_1} = \frac{a}{b} \quad \text{и} \quad \frac{M_2B_1}{M_2C_1} = \frac{b}{c}.$$

Отложив затем на M_1A_1 от M_1 отрезок $M_1A = a$, проводим $AB \parallel A_1B_1$, затем — $BC \parallel B_1C_1$ (можно было бы отложить и $M_1B = b$ и $M_1C = c$), потом — $CD \parallel AB$ и $AD \parallel BC$.

$ABCD$ — искомый квадрат.

Отложив еще от точки M_2 отрезки $M_2A_2 = a$, $M_2B_2 = b$ и $M_2C_2 = c$ и проведя $C_2D_2 \parallel A_2B_2$, и $A_2D_2 \parallel B_2C_2$, получим еще другой квадрат $A_2B_2C_2D_2$, три вершины которого отстоят от точки M_2 соответственно на расстояния a, b, и c. В первом случае точка M_1 оказалась вне квадрата $ABCD$, во втором случае точка M_2 — внутри квадрата $A_2B_2C_2D_2$.

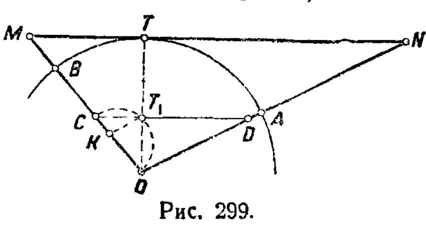


Рис. 299.

Доказательство аналогично предыдущему. Возможность решения и число решений зависит от пересечения вспомогательных окружностей.

5) Дан сектор AOB. Провести касательную к его дуге так, чтобы отрезок MN касательной, заключенный между продолжениями радиусов сектора, делился в точке касания T в отношении $m:n$ (рис. 299).

Понятно, что $OT \perp MN$. Произвольная прямая CD, параллельная MN, отсекает от треугольника MON треугольник COD, подобный ему, значит $OT_1 \perp CD$.

$\angle CT_1O = 90°$, а потому точка T_1 должна лежать на окружности, построенной на OC как на диаметре. Но $MT:TN = m:n$, следовательно, и $CT_1:T_1D = m:n$; проведя затем $T_1K \parallel OD$, имеем: $OD:T_1K = DC:CT_1 = (m+n):m = OK:CK$.

Итак, $OK:CK = (m+n):m$, поэтому точка T_1 должна лежать и на прямой $KT_1 \parallel ON$, проходящей через точку K, в которой OC делится в отношении $(m+n):m$, считая от точки O.

Построение а) OC — произвольный отрезок, отложенный от центра O на радиусе OB; б) строится окружность на OC как на диаметре; в) отрезок OC делится в отношении $(m+n):n$; г) $KT_1 \parallel ON$; д) продолжают OT_1 до пересечения с дугой в точке T и е) проводят $MN \perp OT$ до пересечения с продолжениями радиусов.

6) Построить треугольник по его периметру $2p$ и углам α и β.

Строим произвольных размеров треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 300), углы которого равны α и β. Треугольник $A_1B_1C_1$ подобен искомому, и таких треугольников можно построить бесчисленное множество.

Берем произвольную точку O и рассматриваем ее как центр подобия; для удобства выбираем точку O на продолжении стороны A_1B_1 и проводим луч OC_1. Отложив затем от O отрезок OK_1, равный периметру $2p_1$ треугольника $A_1B_1C_1$, соединим C_1 с K_1. Отложив затем от точки O отрезок OK, равный периметру $2p$ искомого треугольника, проводим $KC \parallel K_1C_1$. Тогда C и будет вершиной искомого треугольника. Проведя затем $CB \parallel C_1B_1$ и $CA \parallel C_1A_1$, получаем искомый треугольник ABC.

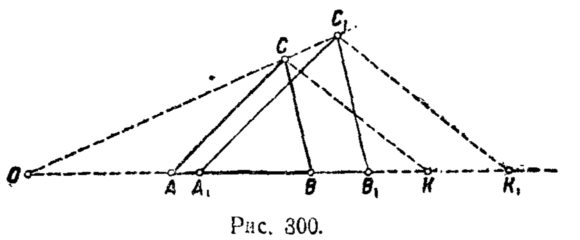


Рис. 300.

Иное решение данной задачи было приведено выше (рис. 200). Понятно, что различные приемы решения одной и той же задачи зависят от того, в каком месте курса рассматривается задача. Решать одну и ту же задачу различными приемами, как правило, не следует; однако, если ознакомление учащихся с новыми геометрическими фактами позволяет решить уже знакомую им задачу приемом, более простым, следует дать соответствующее решение задачи; одновременно следует обратить внимание учащихся на то, что более распространенное и углубленное знание предмета дает возможность находить нередко при решении задач пути, приводящие к цели скорее и приемами, более простыми.

Задачи 3, 4, 5 и 6 решены методом подобия. Этот метод заключается в том, что прежде всего строится фигура, подобная искомой. Для этого следует, в первую очередь, обратить внимание на те данные в условии задачи, которые определяют вид искомой фигуры, но не ее размеры, и построить фигуру, подобную искомой. Какой-либо отрезок искомой фигуры, данный в условии задачи, дает возможность построить и самую фигуру, требуемых размеров.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Какие два многоугольника называются подобными и подобно расположенными?

2. Какие два одноименных многоугольника называются подобными?

3. Перечислить рассмотренные признаки подобия треугольников.

4. На одной из сторон треугольника ABC дана точка M; провести через точку M прямую, отсекающую от данного треугольника треугольник, подобный данному. Указать число решений.

5. Сколько прямых, отсекающих от данного треугольника подобные ему треугольники, можно провести через точку, данную внутри его контура?

6. Тот же вопрос 5-й для точки, лежащей вне контура треугольника.

7. Каким образом проще всего построить треугольник, подобный данному? многоугольник, подобный данному?

8. Вписать в круг радиуса R треугольник, подобный данному.

9. Можно ли вписать в данный круг (или описать около него) два подобных треугольника, не равных между собой?

10. Если три высоты одного треугольника пропорциональны трем высотам другого, то треугольники подобны. Доказать.

11. Вписать в сектор (сегмент) квадрат так, чтобы две его вершины лежали на дуге, а две другие вершины — на радиусах (на хорде).

12. Внутри данного прямоугольника лежит другой прямоугольник, стороны которого параллельны сторонам данного и отстоят от него на одно и то же расстояние; подобны ли прямоугольники?

13. К данному отрезку AB в его концах проведены по одну сторону перпендикуляры $AM = a$ и $BN = b$ и отрезки MB и NA, пересекающиеся в точке O. Расстояние от O до AB равно x. Доказать, что $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

14. Основание равнобедренного треугольника $AB = c = 3$ *см*. Из концов основания A и B через середину O высоты CD проведены две прямые AK и BL, пересекающие боковые стороны в точках K и L. Найти расстояние KL.

15. В круг радиуса $R = 6$ *дм* вписан треугольник ABC, две стороны которого $a = 9$ *дм* и $c = 4$ *дм*. Вычислить h_b.

16. Трапеция, одно из оснований которой $b = 12$ *м* и углы при нем острые, а другое $a = 3{,}0$ *м*, делится диагональю на два подобных треугольника, в каждый из которых вписан круг. Радиус круга, касающийся стороны a, равен $r_a = 1{,}0$ *м*. Вычислить радиус r_b второго круга.

17. Построить треугольник по m_a, m_b и m_c.

18. В данный треугольник вписать прямоугольник, стороны которого относятся, как $m:n$.

19. В данный квадрат вписать прямоугольник так, чтобы вершины его лежали на сторонах квадрата и стороны его относились, как $m:n$.

Указания к контрольным вопросам.

1. Подобно расположенными и подобными многоугольниками называются многоугольники, которые удовлетворяют следующим условиям:

а) число сторон их равно, они одноименны;

б) соответственные стороны их параллельны;

в) прямые, проходящие через соответственные вершины их, пересекаются в одной точке, в центре подобия;

г) соответственные стороны пропорциональны;

д) соответственные углы равны.

2. Для подобия двух одноименных многоугольников необходимы два условия („г“ и „д“ из предыдущего указания).

3. Два треугольника подобны, если:

а) два угла одного равны двум углам другого;

б) две стороны одного пропорциональны двум сторонам другого и углы между ними равны;

в) все три стороны одного пропорциональны трем сторонам другого;

г) две стороны одного пропорциональны двум сторонам другого и углы, лежащие против бо́льших из этих сторон, равны;

д) стороны одного параллельны (перпендикулярны) сторонам другого.

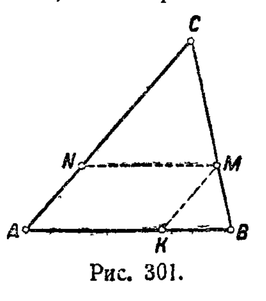


Рис. 301.

4. Проведя из точки M прямые MN и MK, параллельные AB и AC (рис. 301), мы отсекаем два треугольника, подобных треугольнику ABC а именно: треугольник MCN и треугольник MKB. Если построить при BC в точке M углы, равные углу A, можно получить еще два треугольника, MN_1C и MK_1B, подобные данному (рис. 301а). Если данный треугольник — равнобедренный или равносторонний, то число решений соответственно 3 или 2.

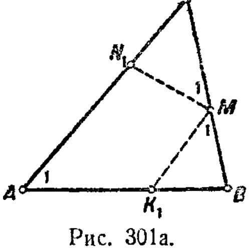


Рис. 301а.

5. Если точка M лежит внутри треугольника, то через нее можно провести три прямые, параллельные сторонам треугольника; эти прямые отсекут три подобных треугольника: NN_1C, KK_1B и LL_1A (рис. 302). Можно провести прямые и

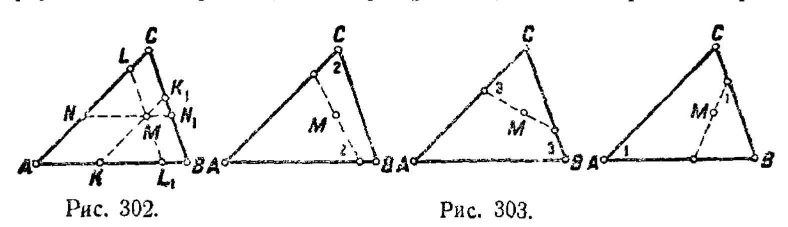


Рис. 302. Рис. 303.

так, как указано на рисунке 303. Итак, имеется 6 решений. Следует рассмотреть и частные случаи, когда данный треугольник прямоугольный, равнобедренный, равносторонний.

6. Решение аналогично решению задачи 5.

7. 1) Провести в данном треугольнике прямую, параллельную какой-либо его стороне. 2) Провести из одной вершины все диагонали и через произвольную точку одной из них — прямую, параллельную стороне, и т. д. (рис. 304).

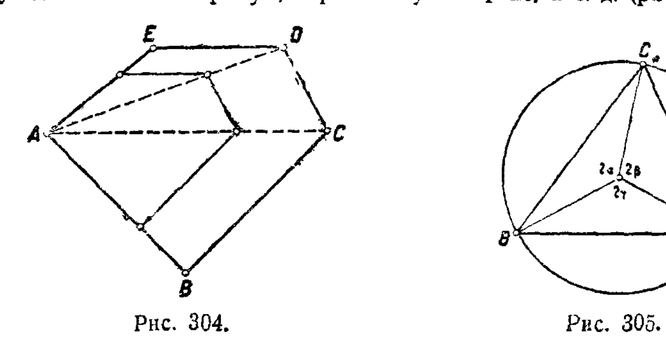


Рис. 304. Рис. 305.

8. Допустим, что задача решена и треугольник вписан в круг. Если соединить центр O с вершинами, то $\angle AOB = 2\gamma$, $\angle BOC = 2\alpha$ и $\angle COA = 2\beta$ (рис. 305).

Построив при центре O прилежащие углы 2α и 2β (третий угол получится как дополнительный к сумме этих двух до 360°) и соединив концы радиусов хордами, получим искомый треугольник. Треугольник всегда можно построить и притом только один (см. задачу 9).

9. Два подобных треугольника, вписанных в данный круг, должны быть равными, ибо радиусы описанных кругов равны, а если сходственные линейные элементы подобных треугольников равны, то равны и треугольники. То же относится и к треугольникам, описанным по отношению к данному кругу.

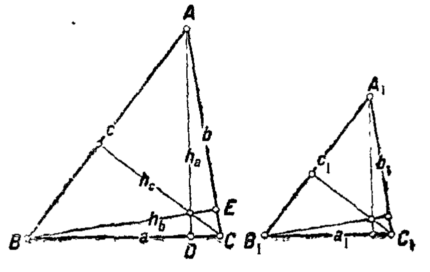


Рис. 306.

10. Даны два треугольника, ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 306). Пусть a, b, c — стороны и h_a, h_b, h_c — высоты первого треугольника, a_1 b_1, c_1 — стороны и h_{a_1}, h_{b_1}, h_{c_1} — высоты второго треугольника. Рассмотрим прямоугольные треугольники ADC и BEC; они подобны, так как у них острый $\angle C$ — общий; отсюда следует, что $a:b = h_b:h_a$; разделив оба члена правой части на $h_a \cdot h_b$, имеем:

$$a:b = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b}. \qquad (1)$$

Аналогичными рассуждениями находим:

$$b:c=\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}. \qquad (2)$$

Из равенства (1) и (2) имеем:

$$a:b:c=\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}, \qquad (3)$$

т. е. **стороны треугольника обратно пропорциональны соответственным высотам треугольника.**

Такое равенство можно записать и для треугольника $A_1B_1C_1$, а именно:

$$a_1:b_1:c_1=\frac{1}{h_{a_1}}:\frac{1}{h_{b_1}}:\frac{1}{h_{c_1}}. \qquad (4)$$

Согласно условию задачи $h_a:h_b:h_c=h_{a_1}:h_{b_1}:h_{c_1}$. Пусть коэфициент пропорциональности есть k, тогда $h_a=kh_{a_1}$, $h_b=kh_{b_1}$ и $h_c=kh_{c_1}$. Если в равенстве (3) заменить h_a, h_b, h_c соответственно через kh_{a_1}, kh_{b_1} и kh_{c_1}, то получим:

$$a:b:c=\frac{1}{kh_{a_1}}:\frac{1}{kh_{b_1}}:\frac{1}{kh_{c_1}}.$$

После умножения правой части последнего равенства на k имеем:

$$a:b:c=\frac{1}{h_{a_1}}:\frac{1}{h_{b_1}}:\frac{1}{h_{c_1}}. \qquad (5)$$

Сравнивая равенства (4) и (5), заключаем, что их правые части равны, откуда следует, что

$$a:b:c=a_1:b_1:c_1.$$

Последнее равенство указывает, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

11. Допустим, что задача решена и квадрат $KLMN$ вписан в данный сектор AOB (рис. 307). Проводим $OC\perp NK$, тогда $NC=CK$, но $OC\perp LM$ и $DMNC$ — прямоугольник $DM=NC$ и $DL=CK$; кроме того $\triangle ODM=\triangle ODL$ и OD — биссектриса угла MOL. Соединим точки O и N и из произвольной точки N_1 на ON проводим $N_1M_1 \parallel NM$, $N_1C_1\perp OC$ и $M_1D_1\perp OC$, $D_1M_1N_1C_1$ — прямоугольник, подобный $DMNC$. Значит, $\frac{D_1M_1}{M_1N_1}=\frac{LM}{MN}=\frac{2}{1}$ и $M_1N_1=2M_1D_1$; последнее равенство дает нам возможность найти вершину квадрата.

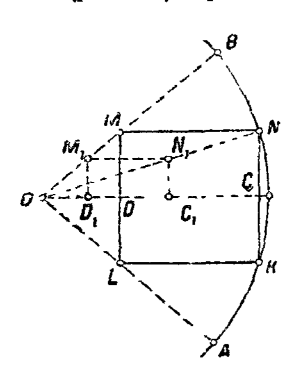


Рис. 307.

Построение. Строим биссектрису OC угла AOB; проводим затем $M_1D_1\perp OC$ и $M_1N_1 \parallel OC$ и откладываем $M_1N_1=2M_1D_1$, тогда радиус ON, проходящий через точку N_1, пересечет дугу сектора в точке N — вершине квадрата. Далее — $NM \parallel OC$ и $NK\perp OC$, $ML\perp OC$ и LK.

Доказательство основано на подобии треугольников. Исследование показывает, что задача всегда возможна, если только $\angle AOB\leq 270^\circ$.

12. Обозначим стороны данного прямоугольника через a и b, а расстояние между сторонами через x, тогда стороны внутреннего прямоугольника будут $a-2x$ и $b-2x$.

Чтобы прямоугольники были подобны, необходимо, чтобы их стороны были пропорциональны:

$$\frac{a}{b}=\frac{a-2x}{b-2x}.$$

Решаем написанное уравнение-пропорцию:

$$ab-2ax=ab-2bx, \quad 2ax=2bx$$

и

$$ax-bx=0 \quad \text{или} \quad x(a-b)=0.$$

Последнее равенство показывает, что или $x=0$ или $a-b=0$, т. е. $a=b$; значит, прямоугольники подобны при условии, если они квадраты или если они равны.

13. Сделав соответствующее построение (рис. 308), находим:

$$\frac{x}{b}=\frac{AK}{AB}, \quad \frac{x}{a}=\frac{KB}{AB}.$$

Суммируя оба равенства, получаем:

$$\frac{x}{b}+\frac{x}{a}=\frac{AK+KB}{AB}=\frac{AB}{AB}=1$$

или

$$\frac{x}{b}+\frac{x}{a}=1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{b}+\frac{1}{a}=\frac{1}{x}.$$

Этим выводом можно воспользоваться для построения весьма простой и несложной **номограммы**, с которой можно познакомить учащихся. Нужно обратить внимание, что длина отрезка AB не влияет на величину x. Номограмма строится так: наклеивают на доску из фанеры миллиметровую бумагу и проводят отрезок AB произвольной длины (рис 309). На перпендикулярах к нему в его концах вбивают гвоздики на расстоянии 1 *см* друг от друга. В точке A

Рис. 308.

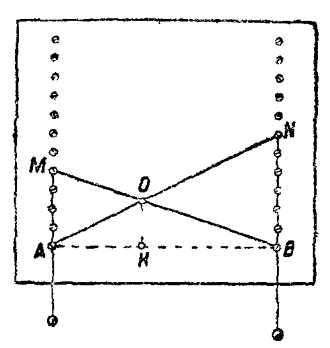


Рис. 309.

привязан одним концом шнурок; в точке B привязан таким же образом другой шнурок. Шнурки перекидываются через соответствующие деления на AM и BN; точка пересечения O шнурков позволяет подсчитать на миллиметровой бумаге длину искомого отрезка $OK=x$. К свободным концам шнурков привешивают грузила.

На рисунке 309 $a=4$, $b=6$ и $x=2{,}4$, и тогда

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2{,}4} \quad \text{или} \quad \frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}.$$

Эта номограмма может быть использована при решении задач из физики по разделу „оптика".

14. Проводим $OM \parallel AB$ (рис. 310); OM — средняя линия треугольника ACD и потому $OM=\frac{AD}{2}=\frac{1}{4}AB$.

$\triangle ABL \backsim \triangle OLM$ и потому $AB:OM=4:1$ и $\frac{BL}{OL}=4$ и $\frac{BO}{OL}=3$.

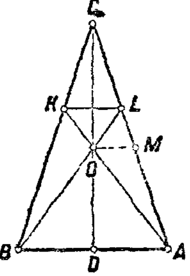


Рис. 310.

$\triangle AOB \backsim \triangle KOL$, и потому $\frac{AB}{KL}=\frac{OB}{OL}=3$ и $AB=3KL=3$, откуда $KL=1$.

15. Проведем диаметр BD (рис. 311) и соединим точку D с точкой C, тогда $\triangle BDC \backsim \triangle BAK$, а потому $\frac{a}{2R}=\frac{h_b}{c}$, откуда $h_b=\frac{ac}{2R}$. При построении надо иметь в виду соответствующий масштаб, например 1:10.

Эта задача предваряет вычисление R по трем сторонам треугольника. Следует рассмотреть и частный случай, когда треугольник прямоугольный. Для данного случая $h_b = 3$ *дм*.

16. $ABCD$ — трапеция, ее диагональ BD делит согласно условию трапецию на два подобных треугольника, $\triangle ABD \backsim \triangle BCD$ (рис. 312). Необходимо, прежде всего, установить, какие углы одного треугольника соответственно равны углам другого треугольника. Понятно, что $\angle CBD = \angle ADB$ как углы накрест лежащие, угол CBD треугольника BCD — острый, ему соответствует острый угол A треугольника BAD; наконец, $\angle C = \angle ABD$. Равенство соответственных углов обоих треугольников должно быть отмечено на рисунке особыми значками, чтобы облегчить безошибочное распознавание и запись соответственных сторон рассматриваемых треугольников. Обозначив основания трапеции через a и b, диагональ BD трапеции через x, следует записать также и соответственно расположенные стороны обоих треугольников.

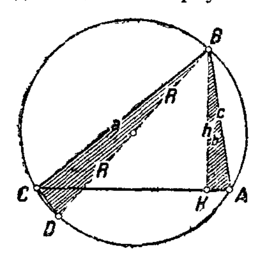


Рис. 311.

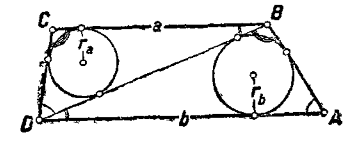


Рис. 312.

$\triangle BCD$		$\triangle ABD$
Сторона $BC = a$,	ей соответствует сторона	$BD = x$
» $BD = x$	» » »	$AD = b$
» DC	» » »	AB

Треугольники BCD и ABD подобны, а потому

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}, \quad \text{откуда} \quad x = \sqrt{ab}.$$

Вписав в данные треугольники окружности радиусов r_a и r_b и зная, что в подобных треугольниках радиусы пропорциональны сходственным сторонам треугольников, имеем:

$$\frac{r_a}{r_b} = \frac{a}{x} \quad \text{или} \quad \frac{r_a}{r_b} = \frac{a}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},$$

откуда

$$r_b = \frac{r_a\sqrt{b}}{\sqrt{a}}.$$

Подставляя в полученное равенство $a = 3{,}0$ *м*, $b = 12$ *м*, $r_a = 1{,}0$ *м*, находим

$$r_b = \frac{1{,}0\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{3{,}0}} = 2{,}0 \text{ м}.$$

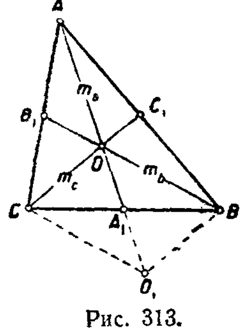


Рис. 313.

17. Анализ. Допустим, что задача решена и треугольник ABC построен. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — его медианы, пересекающиеся в точке O (рис. 313). Продолжив отрезок на расстояние $A_1O_1 = OA_1$, соединим точку O_1 с точками B и C, тогда OBO_1C — параллелограм и $BO_1 = OC = \frac{2}{3}m_c$, отрезок же OC можно считать как бы перенесенным параллельно ему самому в положение BO_1.

Задача сводится к построению треугольника OBO_1 по трем сторонам.

Построение. Построив треугольник OBO_1 по трем его сторонам $\frac{2}{3}m_a$, $\frac{2}{3}m_b$ и $\frac{2}{3}m_c$, проводим медиану BA_1 и продолжаем ее на отрезок $A_1C = BA_1$, тогда точки B и C — две вершины искомого треугольника. Если затем продолжить сторону OO_1 на расстояние $OA = O_1O$, то получится третья вершина A искомого треугольника. Соединив точку A с точками B и C, получаем требуемый условиями задачи треугольник.

Доказательство. Отрезок AA_1 — медиана треугольника ABC; она равна $AO + OA_1 = \frac{2}{3}m_a + \frac{1}{3}m_a = m_a$. Четырехугольник BO_1CO — параллелограм, так как его диагонали взаимно делятся пополам; отсюда следует, что $OC_1 \parallel O_1B$ и $OB_1 \parallel O_1C$, а потому C_1 и B_1 — середины сторон AB и AC и $CC_1 = m_c$, а $BB_1 = m_b$.

Исследование. Построение возможно, если

$$\frac{2}{3}m_c - \frac{2}{3}m_a < \frac{2}{3}m_b < \frac{2}{3}m_c + \frac{2}{3}m_a,$$

$$m_c - m_a < m_b < m_c + m_a.$$

Такие же неравенства должны существовать для m_a и m_c.

18. Решение задачи сходно с решением задачи 1; вместо квадрата $DEFG$ строится прямоугольник, отношение сторон которого равно $m:n$.

19. Допустим, что в квадрат $ABCD$ (рис. 314) вписан прямоугольник $EFGH$, вершины которого лежат на сторонах квадрата. Пусть сторона квадрата равна a, стороны прямоугольника равны x и y.

Рис. 314.

Рассматривая треугольники EBF, FCG, GDH и HAE, заключаем, что $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7$ и $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8$ как острые углы с взаимно перпендикулярными сторонами, а потому $\triangle EBF = \triangle GDH$ и $\triangle FCG = \triangle HAE$ и $\triangle GCF \sim \triangle DHG$.

Из подобия этих треугольников следует, что

$$\frac{x}{y} = \frac{a-y}{a-x},$$

откуда

$$ax - x^2 = ay - y^2,$$

или

$$a(x-y) = x^2 - y^2,$$

или

$$a(x-y) - (x-y)(x+y) = 0,$$

или

$$(a-x-y)(x-y) = 0,$$

откуда

$$x = y \quad \text{или} \quad x + y = a.$$

Итак, при $x = y$ треугольник GDH равнобедренный и $\angle 3 = 45°$, а потому $GH \parallel CA$ — диагонали квадрата; 2) при $x + y = a$ вписанный прямоугольник переходит в квадрат.

Разбор задачи показывает, что стороны вписанного прямоугольника параллельны диагоналям квадрата; на это следует обратить внимание учащихся и привести указанное выше доказательство.

Чтобы вписать в квадрат прямоугольник, отношение сторон которого равно $\frac{m}{n}$, определим сперва, чему равна одна из сторон прямоугольника, положим x.

Из подобия треугольников GDH и CCF имеем:

$$\frac{GH}{GF}=\frac{DG}{GC} \quad \text{или} \quad \frac{m}{n}=\frac{x}{a-x},$$

откуда $x=\frac{am}{m+n}$. Таким образом, x — четвертая пропорциональная трех отрезков: a, m и $m+n$. Можно поступить и иначе: вписать в треугольник ADC прямоугольник, стороны которого относятся, как $m:\frac{n}{2}$.

§ 16. Метрическая зависимость между элементами прямоугольного треугольника.

Сводка пройденного о треугольниках.

1. Метрическая зависимость между элементами треугольника — это тот раздел планиметрии, в котором рассматривается числовая зависимость между основными элементами треугольника — его сторонами и углами и неосновными элементами треугольника — его высотами, медианами, биссектрисами, радиусами окружностей — вписанных, описанных и приписанных, проекциями сторон и отрезков на прямые и т. д.

При прохождении этого раздела преподаватель должен помнить, что не следует чрезмерно увлекаться вычислительной геометрией в ущерб геометрии построения. И вычислительной геометрии и геометрии построения в одинаковой степени должно быть отведено место при решении отдельных вопросов; элементы построения, по возможности, должны всегда сопутствовать вычислениям.

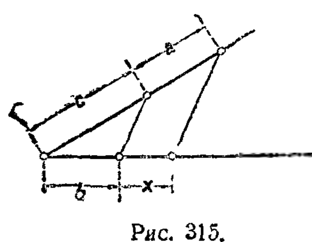


Рис. 315.

Тщательно выполненный чертеж помогает решению вопроса; недаром индусы зачастую ограничивались одним чертежом с лаконическою надписью под ним: „смотри".

До сих пор мы находили величину какого-либо отрезка, например длину стороны фигуры, или путем сравнения соответственных отрезков двух фигур после установления их равенства или подобия, или же на основании определенных свойств самой фигуры; теперь же мы займемся выводом формул, выражающих числовую зависимость между элементами треугольника. Формулы позволят по трем данным независимым линейным элементам треугольника находить все остальные его элементы; при этом основной задачей является задача о вычислении элементов треугольника по трем данным его сторонам.

Одновременно необходимо будет решить не только вычислением, но и построением и обратную задачу — найти по данной формуле, выражающей зависимость между отдельными отрезками фигуры, один из отрезков фигуры по другим ее отрезкам, длина которых как число входит в данную формулу. Так, если в формуле $x=\frac{a\cdot b}{c}$ числа a, b и c выражают отрезки определенной длины, то x есть отрезок четвертый, пропорциональный отрезкам a, b и c (рис. 315).

2. Прежде чем приступить к разделу „Метрические соотношения в треугольнике", следует вспомнить вместе с учащимися все знакомые

им зависимости между отдельными элементами треугольника. Эти зависимости следующие:

А. Зависимость между его сторонами:

1) Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон и больше их разности:

$$b-c<a<b+c \text{ и т. д.}$$

Б. Зависимость между его углами:

2) Сумма внутренних углов треугольника равна $2d$:

$$\angle A+\angle B+\angle C=2d.$$

3) Сумма внешних углов треугольника (и сумма внешних углов любого выпуклого многоугольника) равна $4d$:

$$\angle 1+\angle 2+\angle 3=4d.$$

4) Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, с ним не смежных:

$$\angle 1=\angle B+\angle C.$$

5) В треугольнике против равных сторон лежат равные углы и против большей стороны лежит и больший угол и обратно:

если $\angle A=\angle B$, то $BC=CA$ и обратно,

если $\angle A>\angle B$, то $BC>CA$ и обратно.

6) В прямоугольном треугольнике:

а) катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы;

б) высота, проведенная к гипотенузе равнобедренного прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы:

$$h_c=\frac{c}{2};$$

в) медиана, проведенная к гипотенузе, равна: 1) половине гипотенузы и 2) радиусу описанной окружности:

$$m_c=\frac{c}{2}=R.$$

7) Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные соответственным прилежащим двум другим сторонам (рис. 316):

$$n_a:n_c=a:c.$$

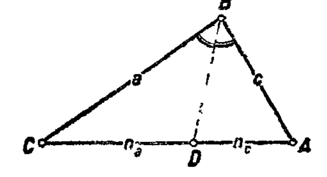


Рис. 316.

При рассмотрении п. Б, 5 разъясняется учащимся, что стороны и углы треугольника непропорциональны. Следует повторно дать задачу: углы треугольника относятся, как 1:2:3; найти углы и затем поставить вопрос, будут ли и стороны треугольника относиться, как 1:2:3.

3. Следует особо подчеркнуть, что три основных элемента треугольника всегда определяют треугольник: 1) если данные элементы независимы и 2) если соблюдаются зависимости, указанные выше в пп. 1 и 2.

Так, если даны все три угла, A, B и C, треугольника, то построить один определенный треугольник нельзя, ибо один из углов есть величина, зависимая от величины двух остальных углов.

На самом деле, $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$.

4. Небесполезно исследовать, в каких сочетаниях могут встретиться каждые 3 основных элемента из общего числа 6 элементов треугольника, чтобы возможно было в каждом отдельном случае построить только один определенный треугольник.

Пусть a, b и c — стороны, A, B и C — углы треугольника и

$$a > b > c \quad \text{и} \quad A > B > C.$$

Тогда при соблюдении условий

$$b - c < a < b + c,$$
$$A + B + C = 180°$$

из шести основных элементов треугольника a, b, c, A, B, C можно составить 20 сочетаний по 3 элемента в каждом:

Эти сочетания следующие:

1) $a\ b\ c$,	8) $a\ A\ B$,	15) $b\ A\ C$,
2) $a\ b\ A$,	9) $a\ A\ C$,	16) $b\ B\ C$,
3) $a\ b\ B$,	10) $a\ B\ C$,	17) $c\ A\ B$,
4) $a\ b\ C$,	11) $b\ c\ A$,	18) $c\ A\ C$,
5) $a\ c\ A$,	12) $b\ c\ B$,	19) $c\ B\ C$,
6) $a\ c\ B$,	13) $b\ c\ C$,	20) $A\ B\ C$.
7) $a\ c\ C$,	14) $b\ A\ B$,	

Анализ полученных сочетаний показывает, что 1) 16 групп — 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19-я — определяют треугольник, 2) три группы — 3, 7 и 13-я — дают два решения и 3) одна группа — 20-я — дает неограниченное число решений.

Сочетания 2, 5 и 12-я соответствуют четвертому признаку равенства двух треугольников.

Для прямоугольного треугольника, в котором прямой угол — величина постоянная, а также для равнобедренного треугольника, в котором две стороны равны, достаточно иметь только два независимых элемента, для равностороннего же треугольника только один — одна его сторона, чтобы построить один определенный треугольник.

Более подробный анализ всех возможных двадцати сочетаний, составленных из шести основных элементов треугольника по три, позволяет отметить еще следующее:

1) в первое сочетание входят все три линейных элемента треугольника; эти три данных отрезка a, b и c вполне определяют треугольник, если $b - c < a < b + c$ и т. д.

2) в последнее 20-е сочетание входят все углы треугольника; три данных угла, однако, не определяют треугольника; чтобы треугольник был вполне определен, необходимо задать один линейный его элемент, хотя бы одну из его сторон, и кроме того сумма данных углов должна быть равна $2d$.

Учитывая последнее условие, мы видим, что ему удовлетворяют сочетания 8, 9, 10, 14, 15, 16, 17, 18 и 19-е, а потому случаи, преду-

смотренные этими сочетаниями, выражают одну и ту же мысль, а именно: *треугольник вполне определяется по стороне и любым двум его углам.*

Из последнего, однако, отнюдь не следует, что два треугольника равны, если сторона и два угла одного треугольника равны стороне и двум углам другого треугольника, если не указано, что равны с о о т в е т с т в е н н о расположенные элементы треугольников.

Пример. На рисунке 317 даны два треугольника, $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, у которых

$$A_1B_1 = A_2C_2 = b \text{ и } \angle A_1 = \angle B_2 = 40^\circ,\ \angle B_1 = \angle C_2 = 60^\circ,\ \angle C_1 = \angle A_2 = 80^\circ.$$

Такие два треугольника, хотя и имеют по равной стороне и по два равных угла, н е р а в н ы, так как они при наложении друг на друга не могут совпасть.

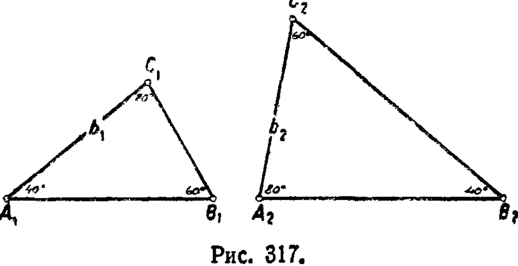


Рис. 317.

Треугольники эти подобны; их сходственными сторонами не будут стороны A_1C_1 и A_2C_2; для стороны A_1C_1 сходственной стороной в другом треугольнике служит сторона A_2B_2, так как каждая из этих сторон лежит против угла в 60°.

Отсюда следует, что равными два треугольника по стороне и двум углам будут только тогда, когда:

1) сторона и два п р и л е ж а щ и х к ней угла одного треугольника с о о т в е т с т в е н н о равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника (сочетания 10, 15, 17-е);

2) сторона, прилежащий к ней и противолежащий ей углы одного треугольника с о о т в е т с т в е н н о равны стороне, прилежащему к ней и противолежащему ей углам другого треугольника (сочетания 8, 9, 14, 16, 18, 19-е).

Полезно задать учащимся два таких треугольника, как показано на рисунке 318, и предложить им доказать их равенство наложением. После совмещения сторон A_1B_1 и A_2B_2 учащиеся укажут, что сторона A_1C_1, вследствие равенства углов A_1 и A_2, пойдет по стороне A_2C_2; при этом, однако, они не могут утверждать, что вершина C_1 совпадет с вершиной C_2; поиски решения вопроса вынудят их предварительно выяснить или построением или вычислением, что при заданном условии $\angle B_1 = \angle B_2$; равенство этих углов позволяет свести доказательство к известному им случаю равенства треугольников по стороне и двум прилежащим углам. Дать учащимся эту задачу непосредственно после рассмотрения признака равенства треугольников нельзя, так как они еще не знакомы с параллельными прямыми, а следовательно и с суммой углов треугольника.

Евклид в I книге своих „Начал" (26-е предложение) доказывает указанный случай равенства треугольников по стороне и двум углам независимо от теоремы: с у м м а у г л о в т р е у г о л ь н и к а р а в н а $2d$. Он доказывает теорему методом доказательства от противного.

Дано: $A_1B_1 = A_2B_2$; $\angle A_1 = \angle A_2$ и $\angle C_1 = \angle C_2$.

Треб. док.: $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$ (рис. 318).

Доказательство. Допустим, что $A_2C_2 \neq A_1C_1$ и что $A_2C_2 < A_1C_1$. Отложив на стороне A_1C_1 от вершины A_1 отрезок $A_1C_3 = A_2C_2$ и соединив точку C_3 с точкой B_1, имеем $\triangle B_1A_1C_3 = \triangle B_2A_2C_2$ (СУС), и потому $\angle A_1C_3B_1 = \angle C_2 = \angle C_1$; но это невозможно, так как $\angle A_1C_3B_1 > \angle C_1$ как внешний угол треугольника $B_1C_3C_1$. Точно так же сторона A_2C_2 не может быть больше стороны A_1C_1, а потому $A_2C_2 = A_1C_1$ и $\triangle A_2B_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ (УСУ).

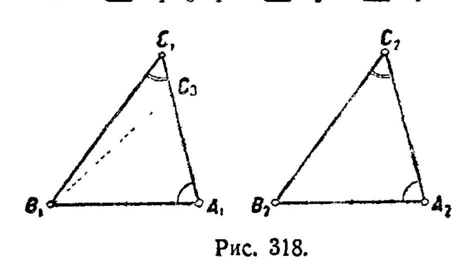


Рис. 318.

Надо показать учащимся, что у двух треугольников могут быть по две равные стороны и все углы равные, однако такие треугольники могут и не быть конгруэнтными. Так, даны два треугольника со сторонами 4, 6 и 9 и 6, 9 и 13, 5; они имеют по две равные стороны и равные углы, такие треугольники подобны, так как их стороны пропорциональны, но они не конгруэнтны.

Можно предложить учащимся начертить два таких треугольника, чтобы они могли убедиться, что углы и стороны в них соответственно не равны. Таковы, например, треугольники со сторонами 8, 12, 18 и 12, 18, 27, или 27, 36, 48 и 36, 48, 64, или 64, 80, 100 и 80, 100, 125.

Следует рассмотреть с учащимися и равенство таких двух треугольников, взаимное расположение которых относительно друг друга дано на рисунке 319.

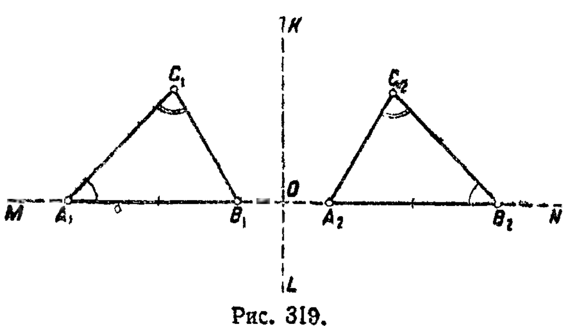


Рис. 319.

В этой задаче они встречаются с затруднением другого рода.

При наложении одного треугольника на другой так, чтобы сторона A_1B_1 совпала с равной стороною A_2B_2, ничего нельзя сказать о направлении сторон. Поэтому нужно расположить равные стороны A_1B_1 и A_2B_2 обоих треугольников на одной прямой MN так, чтобы треугольники лежали по одну сторону от MN, и воспользоваться симметрией. Для этого следует разделить отрезок B_1A_2 пополам и, проведя через точку O — середину B_1A_2 — прямую $KL \perp MN$, повернуть чертеж на 180° в пространстве, рассмотреть совмещение треугольников при их наложении и тем самым убедиться в их равенстве; предварительно, однако, необходимо указать, что $\angle B_1 = \angle A_2$, ибо

$$\angle B_1 = 180° - \angle A_1 - \angle C_1$$

и

$$\angle A_2 = 180° - \angle B_2 - \angle C_2.$$

Итак, два треугольника равны по стороне и двум углам только при том условии, если указано, что в обоих треугольниках или оба угла — прилежащие к данной стороне, или один из них — прилежащий к данной стороне, а другой — ей противолежащий.

При построении треугольника, две стороны и угол которого даны, получается единственно возможный треугольник в том случае, если данный угол лежит между данными сторонами или против большей из них; если же данный угол лежит против меньшей из данных сторон, то треугольник определяется двузначно: могут получиться или два неравных треугольника или один прямоугольный треугольник в предельном случае.

Учащиеся должны выполнить всевозможные случаи построения треугольника по заданным трем его определенным независимым элементам.

5. После подобного повторения, а также и углубления пройденного можно предложить учащимся письменную работу.

В данном ниже перечне вопросов наиболее просты вопросы 1—8-й. Для ответа на каждый из них учащемуся дается в среднем около 1—2 минут; на вопросы 9—15-й — в среднем от 3 до 5 минут на каждый ответ; на всю работу отводится примерно 50 минут.

Примерный перечень вопросов для письменной работы.

1) В треугольнике ABC даны $\angle A = 60°$, $\angle B = 70°$.	$\angle C =$
2) В равнобедренном треугольнике ABC сторона $a = 3$ *см*, сторона $b = 6$ *см*.	Сторона $c =$
3) В треугольнике ABC внутренние углы A, B и C и соответственные внешние углы его — α_1, β_1, γ_1, причем $A = 80°$ и $B = 40°$.	$\alpha_1 =$ $\beta_1 =$ $\gamma_1 =$
4) В треугольнике ABC $\angle A > \angle B$.	$a = b$; $a < b$, $a > b$ Зачеркнуть неверные соотношения.
5) В треугольнике ABC $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$ и сторона $c = 10$ *см*.	$a =$
6) В треугольнике ABC $\angle A = \angle B = 45°$, $c = 10$ *см*.	$h_c =$
7) В треугольнике ABC $c = 10$ *см*, $m_c = 5$ *см*.	$\angle C =$
8) Диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 1 *м*.	Гипотенуза $c =$

9) Периметр треугольника ABC равен 18 *м*. Биссектриса β_B делит сторону на два отрезка, $n_a = 2{,}5$ *м* и $n_c = 3{,}5$ *м*.	$a =$ $c =$
10) Рис. 320. $AB = A_1B_1$; $\angle A = \angle A_1$; $\angle C = \angle B_1$	$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ Неверное зачеркнуть.
11) Рис. 321. $AC = BC$, CM — медиана $MK \perp AC$, $ML \perp BC$	$\triangle BML = \triangle AMK$, так как . . .
12) Что называется высотою треугольника? Что называется, медианою треугольника? Что называется биссектрисою треугольника?	Высотою треугольника называется . . . Медианою треугольника называется . . . Биссектрисою треугольника называется . . .
13) Стороны треугольника ABC равны 6 *см*, 12 *см* и 8 *см*. Стороны треугольника $A_1B_1C_1$ равны 6 *см*, 4 *см* и 3 *см*. Подобны ли треугольники?	Да. Нет. Неверное зачеркнуть.
14) Как следует провести прямую, параллельную какой-нибудь стороне треугольника, чтобы отсечь от него треугольник, периметр которого равен одной трети периметра данного?	
15) Какие свойства геометрической фигуры независимы от ее размеров?	

При решении 13-го вопроса стороны треугольников располагаются в порядке возрастания или убывания:

6, 8 и 12; 3, 4 и 6,

а затем устанавливается пропорциональность соответственных сторон треугольников.

При решении 14-го вопроса надо иметь в виду, что периметры подобных треугольников пропорциональны сходственным сторонам, а потому, разделив сторону треугольника на 3 равные части, следует провести прямую, параллельную стороне треугольника, через ту точку деления его стороны, которая ближе к его вершине.

15-й вопрос требует ответа, основанного на том, что учащиеся должны знать, что: 1) величина углов не зависит от длины сторон и 2) отношение линейных элементов фигуры не зависит от их длины.

Приведенные вопросы являются только примерными. При проверке знаний класса следует давать всем учащимся одинаковые вопросы, чтобы избежать выбора неравносильных по трудности вопросов; необходимо при этом работу обставить так, чтобы учащиеся не могли пользоваться советами соседей.

Метрическая зависимость между элементами прямоугольных треугольников.

6. Для выяснения, почему никакая другая прямая, проведенная через вершину прямоугольного треугольника, кроме высоты, проведенной из вершины прямого угла на гипотенузу, не делит прямоугольный треугольник на два подобных треугольника, следует поставить и рассмотреть следующие вопросы:

1) найти необходимое и достаточное условие, чтобы высота h_a треугольника ABC разделила его на два подобных треугольника, и

2) найти необходимые и достаточные условия, чтобы прямая, проходящая через одну из вершин треугольника и пересекающая противолежащую сторону его, рассекала треугольник на два подобных треугольника.

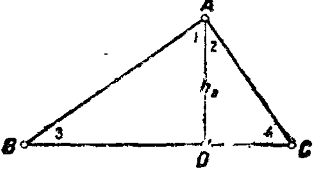


Рис. 322.

Чтобы ответить на первый вопрос, следует в треугольнике ABC произвольной формы (рис. 322) построить высоту $h_a = AD$ и рассмотреть получившиеся при этом прямоугольные треугольники ADB и ADC. Так как два прямоугольных треугольника могут быть подобными только тогда, когда они имеют по равному острому углу, то следует заключить, что треугольники ADB и ADC будут подобны, если или $\angle 1 = \angle 2$ или $\angle 1 = \angle 4$.

В первом случае, когда $\angle 1 = \angle 2$, $h_a = AD$ будет биссектрисой угла A треугольника ABC, и тогда $\angle 3 = \angle 4$, а потому треугольник ABC — равнобедренный и $AB = AC$ и $BD = DC$ и, кроме того, $\triangle ADB = \triangle ADC$. Итак, в том случае когда $h_a = AD$ — биссектриса угла A, треугольник разбивается высотою на два равных, а потому и подобных треугольника.

Во втором случае, когда $\angle 1 = \angle 4$, треугольники ADB и ADC подобны, но тогда и $\angle 3 = \angle 2$ и $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4$, откуда следует, что $\angle 1 + \angle 2 = d$, т. е. $\angle A$ — прямой.

Итак, $h_a = AD$ делит треугольник ABC на два подобных треугольника и в том случае, когда $\angle A = d$, т. е. когда треугольник ABC — прямоугольный.

Чтобы ответить на второй поставленный вопрос, допустим, что в остроугольном треугольнике ABC (рис. 323) проведена произвольная прямая AD

Какие же условия необходимы в данном случае, чтобы треугольники ADB и ADC были подобны?

Прежде всего следует обратить внимание на углы 5 и 6; сумма их равна $2d$, и при этом возможны три случая:

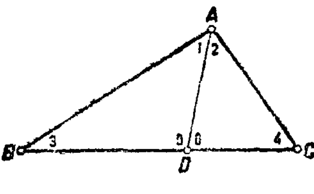


Рис. 323.

1) $\angle 5$ — тупой, $\angle 6$ — острый;

2) $\angle 5$ — острый, $\angle 6$ — тупой;

3) $\angle 5$ — прямой, $\angle 6$ — прямой.

Если $\angle 5$ — тупой, то все остальные углы треугольника ADB, а также треугольника ADC — острые: $\angle 4$ — по данному условию и $\angle 2$ — часть острого угла; $\angle 1$ и $\angle 3$ — потому, что их сумма $\angle 1 + \angle 3 < d$, а $\angle 5 > d$. Значит, треугольник ADC — остроугольный, а так как треугольник ADB — тупоугольный, то треугольники ADC и ADB не могут быть подобными.

Такое же рассуждение можно применить и к случаю, когда $\angle 6$ — тупой. Значит, первые два из трех возможных случаев отпадают.

Итак, чтобы прямая AD разбила остроугольный треугольник ABC на два подобных треугольника, необходимо, чтобы $\angle 5 = \angle 6 = d$. Но в таком случае AD — высота, и треугольник ABC может быть только или равнобедренным, или прямоугольным, или одновременно и равнобедренным и прямоугольным.

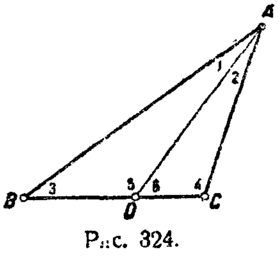


Рис. 324.

Следует рассмотреть и тот случай, когда данный треугольник ABC — тупоугольный (рис. 324). В данном случае любая прямая AD, проходящая через вершину A внутри треугольника, разбивает данный треугольник ABC на два тупоугольных треугольника, у которых оба тупых угла, 5 и 4, не равны между собою, так как $\angle 5$ как внешний угол больше $\angle 4$, $\angle 5 > \angle 4$; а это указывает на то, что треугольники ADB и ADC не могут быть подобными.

Если прямая проведена из вершины т у п о г о угла (рис. 325), то и здесь надо рассмотреть три возможных случая: 1) $\angle 5$ — тупой, 2) $\angle 6$ — тупой и 3) $\angle 5 = d$.

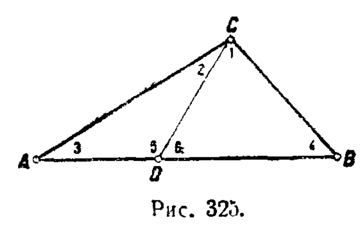


Рис. 325.

1) Если $\angle 5$ — тупой, то $\angle 6$ — острый, и он больше каждого из углов: угла 2 и угла 3, и, следовательно, не может быть равным ни одному из них, а потому треугольник ECD не может быть подобным треугольнику ADC.

2) Если $\angle 6$ — тупой, то аналогичными рассуждениями заключаем, что треугольник ACD не может быть подобен треугольнику BCD.

3) Если $\angle 5 = d$, то и $\angle 6 = d$, и все остальные углы в обоих треугольниках — острые. Чтобы треугольник BDC был подобен треугольнику ADC, необходимо, чтобы или $\angle 2 = \angle 4$ или $\angle 3 = \angle 4$.

Однако если $\angle 2 = \angle 4$, то и $\angle 2 + \angle 1 = \angle 4 + \angle 1 = d$, что невозможно, так как по условию $\angle ACB$ — тупой; если же $\angle 3 = \angle 4$, то и $\angle 1 = \angle 2$, и тогда треугольник ABC — равнобедренный. Итак, тупоугольный треугольник разбивается прямою, проведенной из вершины

тупого угла, лишь в том случае на два подобных и равных треугольника, когда он равнобедренный.

Итак, если исключить случай равнобедренного треугольника, приходим к выводу, что прямая, проведенная в треугольнике через вершину одного из его углов, разделит треугольник на два подобных треугольника только в том случае, когда данный треугольник — прямоугольный.

7. Подобный разбор значительно облегчает дальнейшее рассмотрение с учащимися вопроса об установлении числовой зависимости между элементами прямоугольного треугольника.

После рассмотрения теоремы: *высота делит прямоугольный треугольник ACB на два треугольника — ADC и BDC* (рис. 326), *подобные данному и подобные друг другу*, рассматриваются вытекающие из нее следствия. После рассмотрения указанной теоремы можно предложить учащимся вопрос:

Если из точки D провести перпендикуляры к катетам, то какие получатся треугольники? Подобны ли они треугольнику ACB?

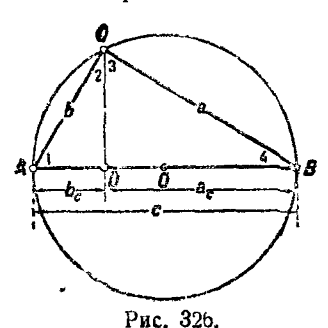


Рис. 326.

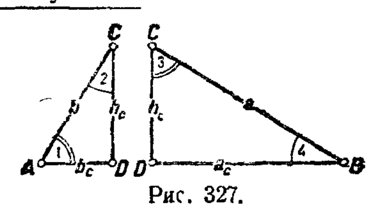


Рис. 327.

1) Из подобия треугольников ADC и BDC (рис. 326) следует, что соответственные их стороны пропорциональны. При записи пропорциональности сторон следует во избежание ошибки придерживаться определенного порядка, а именно: сперва записывают отношение двух сторон одного треугольника, затем — отношение двух соответственных сторон другого треугольника и соединяют оба отношения знаком равенства; во избежание неправильной записи следует вычерчивать оба треугольника ADC и BDC раздельно, как это показано на рисунке 327. Отношения двух сторон, например отношение катетов треугольника ADC, а затем треугольника BDC следует выписывать так:

$$AD \longleftrightarrow \angle 2 = \angle 4 \longleftrightarrow DC,$$
$$DC \longleftrightarrow \angle 1 = \angle 3 \longleftrightarrow DB$$

или

$$b_c \longleftrightarrow \angle 2 = \angle 4 \longleftrightarrow h_c,$$
$$h_c \longleftrightarrow \angle 1 = \angle 3 \longleftrightarrow a_c,$$

откуда

$$\frac{b_c}{h_c} = \frac{h_c}{a_c}, \quad \text{или} \quad b_c : h_c = h_c : a_c;$$

где a_c и b_c — соответственно проекции катетов a и b на гипотенузу c прямоугольного треугольника ABC.

Указывается, что последнее выражение представляет собою непрерывную пропорцию, в которой средние члены равны, а именно h_c — средняя пропорциональная между a_c и b_c.

Отсюда теорема: **высота, проведенная из вершины прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорциональная между отрезками гипотенузы.**

Если же принять во внимание, что AB можно рассматривать как диаметр окружности, то теорема читается так: **перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки окружности на диаметр окружности, есть средняя пропорциональная между отрезками диаметра.**

Зависимость между a_c, b_c и h_c можно записать и в таком виде: $h_c^2 = a_c \cdot b_c$. Равенство это дает зависимость между тремя отрезками, а потому по двум данным из них всегда определяется третий:

$$h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c}; \quad a_c = \frac{h_c^2}{b_c}; \quad b_c = \frac{h_c^2}{a_c}.$$

8. Полученный вывод следует закрепить на ряде задач с числовыми данными, на задачах с практическим содержанием, а также на задачах на построение и на некоторых простейших устных задачах, как, например:

1) В прямоугольном треугольнике $a_c = 2$ и $b_c = 18$. Найти h_c.

Решение.

$$h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6.$$

2) Даны два отрезка m и n. Построить отрезок x, средний пропорциональный между ними (рис. 328).

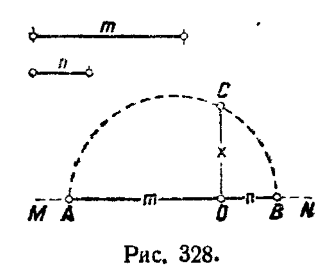


Рис. 328.

Решение. На произвольной прямой MN следует отложить от какой-нибудь точки ее A отрезок $AD = m$ и от точки D — отрезок $DB = n$ и построить на отрезке AB, равном сумме отрезков m и n, как на диаметре полуокружность. Если затем провести $DC \perp AB$, где C — точка пересечения DC с окружностью, то $DC = x$ — искомый отрезок.

Доказательство. На основании приведенной выше теоремы имеем:

$$m : x = x : n \quad \text{или} \quad x = \sqrt{mn}.$$

Примечание. Если $m = n$, то $m = R = n$ и $DC = x = R$, ибо точка D — середина диаметра AB. В самом деле, в этом случае

$$x = \sqrt{R \cdot R} = R.$$

3) Среднее арифметическое двух неравных чисел меньше их среднего геометрического.

Решение приведено в стабильном учебнике.

4) Следует показать, что всякое число, являющееся решением квадратного уравнения или уравнения, приводящегося к квадратному, может быть построено, если за единицу принять некоторый определенный отрезок.

Пусть за единицу принят отрезок AB (рис. 329) и таких отрезков на произвольной прямой отложено друг за другом, например, 7. По-

строены полуокружности на отрезках $AC=2$, $AD=3$, $AE=4$, $AF=5$ и т. д. и проведены перпендикуляры BB_1, CC_1, DD_1, EE_1 и т. д. до пересечения с соответственными окружностями. Длины этих отрезков, вычисленные по доказанной теореме: $h_c=\sqrt{a_c \cdot b_c}$, равны 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ и т. д.

Если построить полуокружность на отрезке $AK=1+\frac{3}{4}$, то получим

$$BL=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

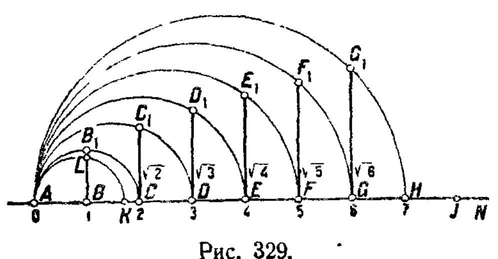


Рис. 329.

Если даны составные числа, то можно упростить построение квадратного корня из них. Так, например, $\sqrt{15}$ можно представить в виде $\sqrt{3 \cdot 5}$, и тогда, построив на отрезке $AB=3+5$ как на диаметре полуокружность (рис. 330), получим $CD=\sqrt{15}$.

Точно так же $\sqrt{18}$, преобразованный к нормальному виду, даст $3\sqrt{2}$, и потому достаточно будет построить отрезок, равный $\sqrt{2}$ и взять его 3 раза слагаемым.

Таким же образом можно построить отрезки, равные $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$, $a\sqrt{15}$ и т. п., преобразовав их предварительно внесением множителя a под радикал: $\sqrt{2a^2}$, $\sqrt{3a^2}$, $\sqrt{15a^2}$ и т. д. и представив их в виде $\sqrt{a \cdot 2a}$, $\sqrt{3a \cdot a}$, $\sqrt{3a \cdot 5a}$ и т. д., и если a — отрезок определенной длины, то придется построить отрезки, средние пропорциональные между отрезками a и $2a$, $3a$ и a, $3a$ и $5a$ и т. д.

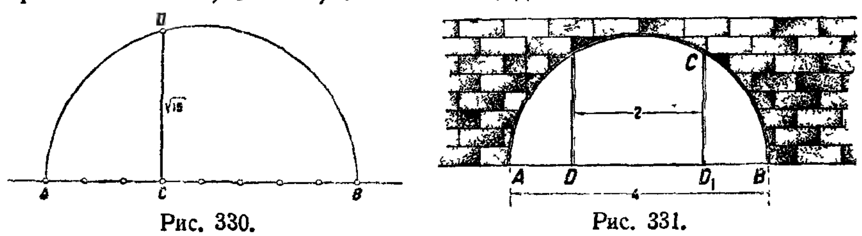


Рис. 330. Рис. 331.

5) В сводчатом подвале, имеющем форму полуцилиндра, надо поставить две стойки; основание каждой отстоит на одинаковое расстояние по полу от ближайшей стены и на расстояние 2,0 *м* друг от друга. Ширина подвала по низу равна 4,0 *м*. Определить высоту стоек (рис. 331).

На рисунке 331 дан разрез подвала: $AB=4$ *м*, AB — диаметр, $DD_1=2$ *м*; $D_1B=1$ *м*, а потому $x^2=1 \cdot 3$ и $x=\sqrt{3}\approx 1{,}7$ *м*.

6) Диаметр полуокружности разделен на 12 равных отрезков, каждый из которых равен 1 *см*; в точках деления проведены к нему перпендикуляры до пересечения с полуокружностью. Определить длину отрезков (рис. 332).

Следует поставить вопрос, нужно ли было рассчитывать все отрезки или достаточно вычислить по порядку только первые 5 из них.

7) Высота, проведенная из вершины прямого угла к гипотенузе, равная 12 *м*, делит гипотенузу на части в отношении 4:9. Найти гипотенузу.

Решение. Обозначим отрезки гипотенузы через $4x$ и $9x$, тогда $4x:12=12:9x$, откуда $36x^2=144$ и $x^2=4$; следовательно, $x=2$ и $4x=8$, а $9x=18$, т. е. гипотенуза равна 26 *м*.

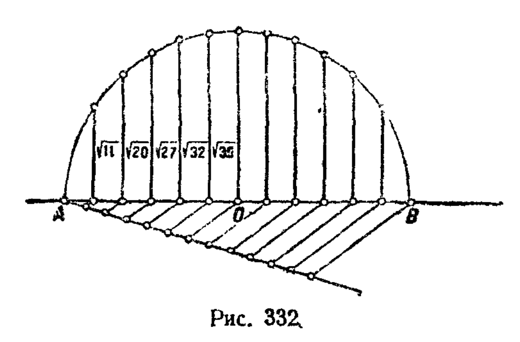


Рис. 332.

Следует заметить, что при решении геометрических задач на вычисление вычислительная сторона не должна отвлекать внимания учащихся и отнимать у них много времени; внимание учащихся должно быть направлено не столько на числовой материал, сколько на выяснение взаимоположения отдельных элементов фигуры.

Однако время от времени следует давать и „неудобные“ числа, чтобы учащиеся не забывали, как производить вычисления с ними.

9. После того как теорема о высоте прямоугольного треугольника доказана, решен ряд задач на вычисление и построение, можно предложить учащимся доказать теорему: **катет прямоугольного треугольника есть средняя пропорциональная между гипотенузой и проекцией катета на гипотенузу.**

Следует при этом рекомендовать учащимся вычерчивать отдельно данный треугольник и тот из малых треугольников, которому принадлежит данный катет, как показано на рисунке 333

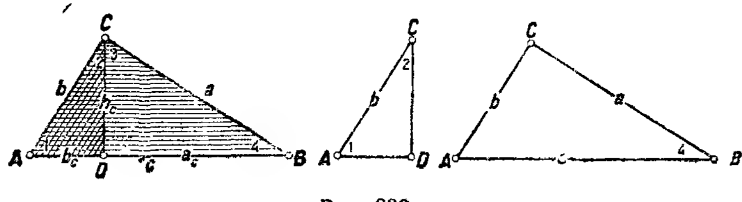


Рис. 333.

Целесообразно выделить каждый из треугольников специальной штриховкой, чтобы более четко отметить общий угол обоих треугольников.

Запись следует выполнять, как указано ниже:

$$\begin{array}{ccc} \underline{\triangle ADC} & & \underline{\triangle ABC} \\ AD \leftrightarrow \angle 2 & = & \angle 4 \leftrightarrow b, \\ AC \leftrightarrow \angle d & = & \angle d \leftrightarrow c, \end{array}$$

или

$$b_c \leftrightarrow \angle 2 = \angle 4 \leftrightarrow b,$$
$$b \leftrightarrow \angle d = \angle d \leftrightarrow c,$$

откуда

$$\frac{b_c}{b}=\frac{b}{c} \quad \text{или} \quad b_c:b=b:c \quad \text{или} \quad b^2=b_c\cdot c,$$

что и требовалось доказать.

Формула $b^2=b_c\cdot c$ связывает три величины, следовательно по двум из них определяется третья:

$$b=\sqrt{b_c\cdot c};\quad b_c=\frac{b^2}{c} \quad \text{и} \quad c=\frac{b^2}{b_c}.$$

Если самостоятельный вывод теоремы для большинства учащихся класса не под силу, то преподаватель сам доказывает ее, для самостоятельной же проработки дает доказательство той же теоремы для случая второго, малого, треугольника BDC и треугольника ABC.

Результат вывода:

$$\frac{a_c}{a}=\frac{a}{c} \quad \text{или} \quad a_c:a=a:c \quad \text{или} \quad a^2=a_c\cdot c.$$

На числовых примерах закрепляются обе формулы.

Примеры:

1) Гипотенуза равна 9 *дм*. Один из катетов равен 6 *дм*. Чему равны проекции катетов на гипотенузу?

Вопрос задачи можно формулировать и так: на какие части делится гипотенуза c высотой h_c?

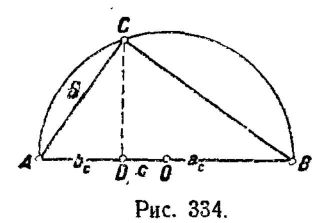


Рис. 334.

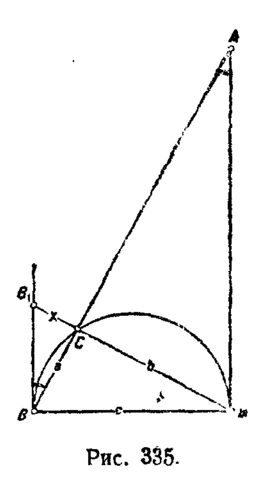


Рис. 335.

Построив окружность диаметра AB, равного 9 *дм* (рис. 334), и хорду $AC=6$ *дм*, соединяем C с B и проводим высоту CD. Обозначив AD через b_c, находим:

$$9:6=6:b_c,$$

откуда

$$b_c=\frac{6\cdot 6}{9}=4 \text{ дм} \quad \text{и} \quad a_c=9-4=5 \text{ дм}.$$

2) В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 335) катеты

$$AC=b=4{,}0 \text{ дм} \quad \text{и} \quad BC=a=2{,}0 \text{ дм}.$$

К гипотенузе AB в конце ее проведены перпендикуляры BB_1 и AA_1 и катеты продолжены до пересечения с этими перпендикулярами в точках B_1 и A_1. На сколько продолжен каждый катет и чему равна гипотенуза?

Решение. 1) $\triangle ABB_1$ — прямоугольный и BC — высота его, а потому

$$x:a=a:b$$

откуда

$$x = \frac{a^2}{b} = \frac{4,0}{4,0} = 1,0\ дм.$$

2) Из того же треугольника ABB_1, где c — катет, имеем:

$$AB_1 : AB = AB : b \quad \text{или} \quad 5,0 : c = c : 4,0,$$

откуда

$$c^2 = 20 \quad \text{и} \quad c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5,0} \approx 4,5\ дм.$$

3) $\triangle A_1AB$ — тоже прямоугольный, а потому

$$y : b = b : a,$$

откуда

$$y = \frac{b^2}{a} = \frac{16}{2,0} = 8,0\ дм.$$

Для проверки правильности решения определим c также из треугольника A_1AB; c — катет, а потому

$$(a + y) : c = c : a$$

или

$$10 : c = c : 2,0; \quad c^2 = 20 \quad \text{и} \quad c = \sqrt{20} \approx 4,5\ дм.$$

Получен тот же результат, задача решена правильно.

Можно было бы проверку провести и иным путем. Из рисунка 335 легко усмотреть, что $\triangle AA_1C \backsim \triangle BB_1C$, так как $\angle A_1$ и $\angle B_1BC$ равны: они — внутренние накрест лежащие при параллельных BB_1 и AA_1 и секущей BA_1, а потому из подобия треугольников следует, что

$$x : a = b : y.$$

Подставляя в эту пропорцию данные значения a и b и найденные значения x и y, имеем:

$$1,0 : 2,0 = 4,0 : 8,0.$$

Пропорция верна; задача решена верно.

Необходимо привить учащимся привычку проверять полученные ими результаты. Они должны знать, что, решив задачу, они сделали полдела, а проверив задачу, они довели дело до конца.

10. Рассматривая прямоугольный треугольник, вписанный в окружность, можно формулировать доказанные теоремы и так:

Теорема. **Если из одной и той же точки окружности проведены диаметр AB и хорда AC, то хорда есть средняя пропорциональная между диаметром и проекцией хорды на диаметр.**

Пример использования данной теоремы.

Задача. Из техники известно, что деревянная балка, поперечное сечение которой — прямоугольник, имеет наибольшее сопротивление изгибу, если перпендикуляры, проведенные из вершин прямоугольника (в сечении) на диагональ, делят последнюю на три равные части. Определить наибольшие размеры поперечного сечения балки, которая может быть выпилена из круглого бревна, диаметр которого равен d (рис. 336).

Делят диаметр AB на три равные части $AD = DC = CB = \frac{d}{3}$; проводят затем в точках C и D перпендикуляры к диаметру AB до пересечения их с окружностью в точках K и L, $CL \perp AB$ и $DK \perp AB$ и соединяют точки K и L с концами диаметра. Получившийся четырехугольник — прямоугольный и удовлетворяет условиям, поставленным техникой. Действительно, из треугольника ABL имеем:

$$AL^2 = d \cdot \frac{2}{3} d = \frac{2d^2}{3},$$

откуда

$$AL = \sqrt{\frac{2d^2}{3}} = \frac{d\sqrt{6}}{3} \approx 0{,}82d,$$

$$BL^2 = d \cdot \frac{1}{3} d = \frac{d^2}{3},$$

откуда

$$BL = \sqrt{\frac{d^2}{3}} = \frac{d\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58d.$$

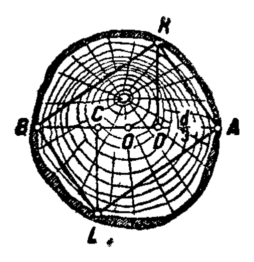


Рис. 336.

Итак, размеры балки должны быть равны 0,82 диаметра и 0,58 диаметра.

11. Следствия, вытекающие из формул:

$$h_c^2 = a_c \cdot b_c, \quad \text{или} \quad h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c}, \tag{1}$$

$$a^2 = a_c \cdot c, \quad \text{или} \quad a = \sqrt{a_c \cdot c}, \tag{2}$$

$$b^2 = b_c \cdot c, \quad \text{или} \quad b = \sqrt{b_c \cdot c}. \tag{3}$$

1) Деля почленно левые и правые части равенств (2) и (3), получаем:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a_c c}{b_c c}, \quad \text{или} \quad \frac{a^2}{b^2} = \frac{a_c}{b_c},$$

т. е. **квадраты катетов относятся, как их проекции на гипотенузу.**

2) Умножая почленно те же два равенства, получаем:

$$\left.\begin{array}{l} a = \sqrt{a_c \cdot c} \\ b = \sqrt{b_c \cdot c} \end{array}\right\} ab = \sqrt{a_c \cdot c} \cdot \sqrt{b_c \cdot c} = \sqrt{a_c \cdot b_c \cdot c^2},$$

или, заменив произведение $a_c b_c$ через h_c^2 на основании первой формулы имеем:

$$ab = \sqrt{h_c^2 c^2} = h_c c,$$

т. е. **произведение катетов равно произведению гипотенузы на высоту, проведенную к гипотенузе.**

3) Складывая почленно равенства (2) и (3), получаем:

$$a^2 + b^2 = a_c c + b_c c = (a_c + b_c) \cdot c,$$

но так как $a_c + b_c$, сумма проекций катетов на гипотенузу, равна c то

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

т. е. **квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.**

12. Полученные следствия позволяют решить целый ряд задач и притом некоторые из них значительно проще.

Задачи.

1) Гипотенуза треугольника равна $c=26$. Катеты относятся, как $m:n$ (2:3). Определить проекции катетов на гипотенузу.

Решение первое. Не зная следствия (1), мы обозначили бы один из катетов через mx, другой — через nx (рис. 337) и нашли бы, пользуясь теоремой Пифагора, сперва катеты, а затем — их проекции на гипотенузу:

Рис. 337.

$$m^2x^2+n^2x^2=c^2,$$

откуда

$$x^2=\frac{c^2}{m^2+n^2} \quad \text{и} \quad x=\frac{c}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Следовательно,

$$AC=\frac{mc}{\sqrt{m^2+n^2}} \quad \text{и} \quad BC=\frac{nc}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Затем определяем a_c и b_c:

$$c\cdot a_c=\frac{n^2c^2}{m^2+n^2} \quad \text{и} \quad a_c=\frac{n^2c}{m^2+n^2},$$

$$c\cdot b_c=\frac{m^2c^2}{m^2+n^2} \quad \text{и} \quad b_c=\frac{m^2c}{m^2+n^2}.$$

Подставляя данные численные значения, имеем:

$$AC=\frac{26\cdot 2}{\sqrt{4+9}}=\frac{26\cdot 2}{\sqrt{13}}=4\sqrt{13};\quad BC=\frac{26\cdot 3}{\sqrt{13}}=6\sqrt{13}.$$

Точно так же найдем:

$$a_c=\frac{9\cdot 26}{13}=18 \quad \text{и} \quad b_c=\frac{4\cdot 26}{13}=8.$$

Необходимо приучать учащихся решать задачи в общем виде; тем самым они приучаются к обобщениям, к умению выражать свою мысль словами. Если класс слаб и необходимо разъяснять решение слабым учащимся, то следует начинать с решения задачи с числовыми данными, а затем уже решать задачу в общем виде.

Решение второе. Проекции катетов относятся, как квадраты катетов, т. е. как $m^2:n^2$.

Обозначив проекции искомых катетов через m^2y и n^2y, имеем:

$$m^2y+n^2y=c,$$

откуда

$$y=\frac{c}{m^2+n^2},$$

и, следовательно,

$$m^2y=\frac{m^2c}{m^2+n^2} \quad \text{и} \quad n^2y=\frac{n^2c}{m^2+n^2},$$

т. е. для данных чисел проекции катетов равны 8 и 18.

Последнее решение значительно проще и не требует, по сравнению спервым решением, больших выкладок.

2) Катеты прямоугольного треугольника равны $a = 1{,}5$ *м* и $b = 2{,}0$ *м*. Найти высоту h_c.

Чтобы найти h_c (рис. 338), следовало бы определить или проекцию a_c или проекцию b_c катетов a и b на гипотенузу; для этого надо сперва определить гипотенузу c по теореме Пифагора:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{и} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

На основании следствия (2) имеем:

$$a \cdot b = h_c \cdot c,$$

откуда

$$h_c = \frac{ab}{c}, \quad \text{или} \quad h_c = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

и для численных данных

$$h_c = \frac{1{,}5 \cdot 2{,}0}{2{,}5} = 1{,}2 \text{ м}.$$

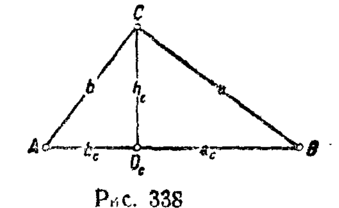


Рис. 338

Этот путь приводит значительно скорее к цели, чем предварительное вычисление a_c или b_c.

13. Если иметь в виду окружность, проходящую через вершины прямоугольного треугольника, то

1) формула $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a_c}{b_c}$ читается так:

если из одной точки окружности провести хорды к концам диаметра, то квадраты хорд относятся, как их проекции на диаметр;

2) формула $ab = ch_c$ читается так:

если из одной точки окружности провести хорды к концам диаметра, то произведение хорд равно произведению диаметра на расстояние точки до диаметра;

3) формула Пифагора читается так:

если из одной точки окружности к концам диаметра проведены хорды, то сумма квадратов этих хорд равна квадрату диаметра.

Такой „перевод формул на другой язык" весьма полезен, так как приучает учащегося к разным формулировкам одного и того же вывода; требовать запоминания различных формулировок не следует, вопрос этот ставится исключительно с той целью, чтобы научить учащегося читать и пояснять формулы.

14. Формулу Пифагора, $c^2 = a^2 + b^2$, учащиеся должны уметь применять и в другом виде; так:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \tag{1}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(c + b)(c - b)}, \tag{2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c + a)(c - a)}. \tag{3}$$

При вычислении катета по гипотенузе и другому катету следует всегда пользоваться формулами (2) или (3); это упрощает вычисления.

Пример. Найти катет a прямоугольного треугольника по гипотенузе $c=25$ *см* и катету $b=24$ *см*.

$$a=\sqrt{25^2-24^2}=\sqrt{(25+24)(25-24)}=\sqrt{49\cdot 1}=7.$$

15. Рассмотренные формулы находят большое применение при решении всевозможных задач, и умение пользоваться ими должно стать твердым навыком.

Учащиеся должны научиться быстро ориентироваться в распознавании взаимного расположения отрезков в прямоугольном треугольнике, в состав какой бы фигуры он ни входил.

Примеры задач, способы их решения, запись их решения.

1) Могут ли стороны прямоугольного треугольника выражаться тремя последовательными числами натурального ряда?

Если первое из искомых чисел равно x, то два следующих за ним числа: $x+1$ и $x+2$. Понятно, что

а) x — положительное число,

б) $x+2$ — наибольшая сторона, т. е. гипотенуза.

По теореме Пифагора имеем:

$$x^2+(x+1)^2=(x+2)^2$$

или

$$x^2+x^2+1+2x=x^2+4+4x; \quad x^2-2x-3=0,$$

откуда

$$x_1=3, \quad x_2=-1.$$

Второй корень не удовлетворяет условию задачи. Стороны треугольника равны: 3, 4 и 5.

Проверка: $3^2+4^2=5^2$, или $9+16=25$, или $25=25$.

Итак, стороны прямоугольного треугольника могут быть выражены тремя последовательными числами натурального ряда, и такими числами являются только числа 3, 4 и 5.

Можно истолковать и второй корень уравнения -1, если иметь в виду направление отрезка. В этом случае другой катет равен нулю, $x+1=-1+1=0$, гипотенуза же равна $+1$, $x+2=-1+2=$ $=+1$. Рассматривая рисунок 338, учащиеся убеждаются, что при уменьшении угла B уменьшаются и гипотенуза BA и катет AC, при этом последний постепенно приближается к нулю; он равен нулю, если угол $B=0$ и гипотенуза $BA=1$. Треугольник „выродился" в отрезок BC.

2) Биссектриса прямого угла треугольника делит гипотенузу на две части в отношении $2:5$; в каком отношении делится гипотенуза высотою?

Биссектрисой гипотенуза делится на части, пропорциональные катетам; следовательно, катеты относятся, как $2:5$; проекции же катетов относятся, как $4:25$.

Эта задача может быть решена в общем виде; однако если класс недостаточно подготовлен, целесообразно сперва решить ее для частного случая, при этом следует предварительно поставить вопрос, как относятся катеты, а потом уже вопрос вышепредложенной задачи.

3) Высотою прямоугольный треугольник делится на два прямоугольных треугольника. Медианы, проведенные к гипотенузам этих треугольников, равны 3 и 4 *см*. Определить медиану m_c, проведенную к гипотенузе данного треугольника.

Эта задача может быть дана для устного решения.

Катеты данного треугольника равны 6 и 8 *см*, следовательно гипотенуза его $c=\sqrt{6^2+8^2}=10$ *см* и медиана его равна 5 *см*.

4) Сторона квадрата равна a. Определить его диагональ.

$$d=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}.$$

Учащийся должен знать, что диагональ квадрата равна его стороне, умноженной на $\sqrt{2}$, и не должен прибегать каждый раз к отдельным вычислениям. После выяснения этого вопроса следует поставить вопрос, чему равна диагональ квадрата, сторона которого равна 5 *см*? 10 *м*? *a дм*? и т. д.

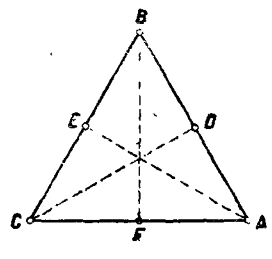


Рис. 339.

5) Высоты равнобедренного треугольника равны 20 *см*, 24 *см* и 24 *см*. Найти стороны треугольника.

Дано: $CB=CA$ и $CD=20$ *см* (рис. 339), $AE=24$ *см*, так как боковые высоты равны.

$\triangle AEB \backsim \triangle CDB$ — они прямоугольные и у них общий угол B, а потому

$$CD:CB=AE:AB \quad \text{или} \quad CD:AE=CB:AB.$$

Итак,

$$CB:AB=20:24=5:6.$$

Пусть $CB=5x$, $AB=6x$, тогда $DB=3x$, и из треугольника CDB имеем:

$$25x^2-9x^2=20^2, \text{ откуда } 16x^2=400 \text{ и } x^2=25.$$

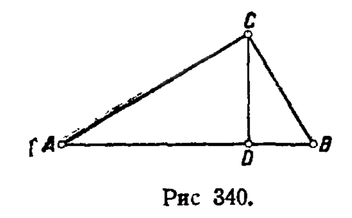


Рис 340.

Следовательно, $x=\sqrt{25}=5$ и $5x=25$, а $6x=30$.

Итак, стороны треугольника равны 25 *см*, 25 *см* и 30 *см*.

Проверку можно выполнить на основании известного соотношения: стороны треугольника обратно пропорциональны соответствующим им высотам.

6) Высотою, проведенной к гипотенузе прямоугольного треугольника, последний делится на два треугольника, периметры которых равны p и q метрам. Определить периметр данного треугольника (рис. 340). Частный случай $p=3$ и $q=4$ *м*.

Обозначим искомый периметр через x.

$$\triangle ADC \backsim \triangle CDB \backsim \triangle ABC,$$

а потому их периметры относятся, как сходственные стороны или как их гипотенузы:

$$p:q:x = CB:AC:AB.$$

Обозначим: $CB = mp$, $AC = mq$ и $AB = mx$, тогда

$$(mp)^2 + (mq)^2 = (mx)^2, \quad \text{или} \quad p^2 + q^2 = x^2,$$

откуда $x = \sqrt{p^2 + q^2}$.

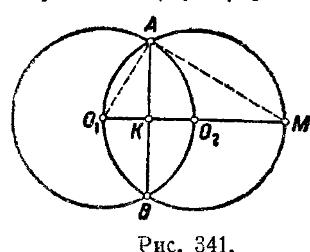


Рис. 341.

Итак, периметр треугольника ABC равен

$$\sqrt{p^2 + q^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ м}.$$

7) Две равные окружности радиуса R пересекаются так, что каждая из них проходит через центр другой. Определить длину их общей хорды.

Построив окружность O_1 радиуса R (рис. 341), возьмем на ней где-либо точку O_2 и тем же радиусом проводим окружность O_2; она пройдет через точку O_1. Проведя O_1M — диаметр окружности O_2, — имеем:

$$O_1K:AK = AK:KM;$$

но $O_1K = \frac{1}{2}R$, $KM = 1\frac{1}{2}R$, а потому

$$AK^2 = \frac{1}{2}R \cdot \frac{3}{2}R = \frac{3}{4}R^2 \quad \text{и} \quad AK = \frac{R}{2}\sqrt{3};$$

следовательно,

$$AB = 2AK = R\sqrt{3}.$$

Данная задача может быть впоследствии использована для построения стороны правильного вписанного треугольника, так как $a_3 = R\sqrt{3}$.

8) Радиусы двух кругов равны $R = 10$ *см* и $r = 5$ *см*. Расстояние между их центрами $d = 39$ *см*. Найти длину их общей внутренней касательной (рис. 342).

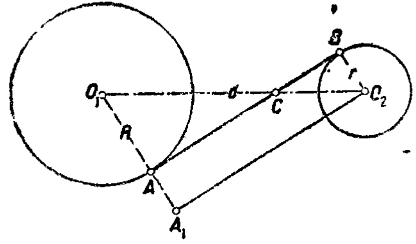


Рис. 342.

Лииия центров $d > R + r$, а потому окружности не касаются и лежат одна вне другой.

Проводим $O_2A_1 \parallel BA$ и продолжим O_1A до пересечания с O_2A_1 в точке A_1; тогда $O_2A_1 = BA$ и из треугольника $O_1O_2A_1$, где $O_1O_2 = d = 39$ и $O_1A_1 = R + r = 10 + 5 = 15$, находим:

$$O_2A_1 = AB = \sqrt{39^2 - 15^2} = \sqrt{54 \cdot 24} = \sqrt{9 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = 3 \cdot 6 \cdot 2 = 36 \text{ см}.$$

После решения задач на вычисление следует решить несколько задач на построение, основанных на разобранных теоремах.

9) Даны отрезки a, b, c и d. Построить отрезки:

$$1)\ x=\sqrt{a^2+b^2-c^2},$$

$$2)\ y=\sqrt{ab+cd},$$

$$3)\ z=\sqrt{a^2+ab+\frac{bcd}{a}}.$$

1) Если $a^2+b^2=m^2$, то m — гипотенуза прямоугольного треугольника, катеты которого равны a и b, а потому $x=\sqrt{m^2-c^2}$, где x — катет треугольника, гипотенуза которого m и другой катет c (рис. 343).

2) Пусть $ab=m^2$ и $cd=n^2$; тогда m — средняя пропорциональная отрезков a и b, n — средняя пропорциональная отрезков c и d, а $y=\sqrt{m^2+n^2}$ — гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами m и n.

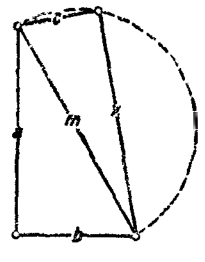


Рис. 343.

При построении не следует вводить лишних линий, если без них можно обойтись. Построение данной задачи выполняется в следующем порядке.

Строим сперва на отрезке $AB=a+b$ полуокружность, а затем отрезок $CK=m$ (рис. 344), продолжаем отрезок CK за точку K и откладываем на прямой CK по разные стороны от точки K отрезки $KM=c$ и $KD=d$. Построив затем на диаметре DM полуокружность, получим $KL=n$; но $KL\perp KC$, а потому, соединив точку L с точкой C прямою, получим $LC=y$.

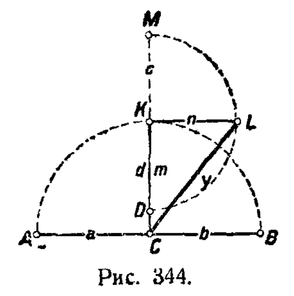


Рис. 344.

Итак,

$$y=\sqrt{m^2+n^2}=\sqrt{ab+cd}.$$

3) Порядок построения отрезка z следующий:

$$а)\ \frac{bc}{a}=m,\quad б)\ md=n^2,\quad в)\ ab=p^2,$$

и тогда

$$z=\sqrt{a^2+p^2+n^2};$$

приняв затем $n^2+p^2=k^2$, получим:

$$z=\sqrt{k^2+n^2}.$$

Следует также приучать учащихся к доказательству таких теорем, которых нет в учебнике. Такие теоремы имеются в § 10 у Рыбкина: № 30, 31, 77.

Понятно, что для приобретения твердых навыков необходимо в порядке выполнения домашней работы решение достаточно большого числа примеров. Всякая домашняя работа должна быть проверена преподавателем: им должны быть отмечены встретившиеся в работах ошибки и даны указания, в чем заключаются ошибки, как следует правильно

решить задачу. Если имеется более краткий путь для решения, то и на это следует указать. На внешнее оформление работы должно быть обращено серьезное внимание; небрежные чертежи и небрежная, неаккуратная запись недопустимы.

Пифагоровы числа.

16. Если данный треугольник — прямоугольный и стороны его a, b и c, где c — бо́льшая сторона — его гипотенуза, то $c^2 = a^2 + b^2$, т. е. квадрат стороны, лежащей против прямого угла, равен сумме квадратов двух других сторон. Следует рассмотреть с учащимися и обратную теорему: если стороны треугольника a, b и c заданы и $a^2 + b^2 = c^2$, то треугольник — прямоугольный. В самом деле, построив прямоугольный треугольник, катеты которого равны a и b, и обозначив гипотенузу его через m, имеем $a^2 + b^2 = m^2$; с другой стороны, дано, что $a^2 + b^2 = c^2$; из сопоставления обоих равенств заключаем, что $c^2 = m^2$, или $c = m$. Значит, данный треугольник со сторонами a, b и c и прямоугольный треугольник со сторонами a, b и m равны по трем данным сторонам; но треугольник со сторонами a, b и m — прямоугольный, значит и треугольник со сторонами a, b и c — прямоугольный.

Теоремой Пифагора и ей обратной пользовались в глубокой древности египтяне. Они знали, что если три отрезка a, b и c таковы, что квадраты их связаны равенством $c^2 = a^2 + b^2$, то из них можно построить прямоугольный треугольник. Всякие три целых числа, которые удовлетворяют этому равенству, называются „пифагоровыми". Известно, что такими числами будут числа 3, 4 и 5; эти числа — единственная тройка *целых последовательных* чисел натурального ряда. Понятно, что пифагоровыми числами будут все числа, равнократные числам 3, 4 и 5, а именно числа:

$$6,\ 8,\ 10;\ 9,\ 12,\ 15 \text{ и т. д.}$$

В самом деле, допустим, что нам даны какие-нибудь три числа, равнократные 3, 4 и 5, например:

$$3m,\ 4m \text{ и } 5m;$$

тогда

$$(3m)^2 + (4m)^2 = (5m)^2.$$

Треугольник со сторонами 3, 4 и 5 называется „египетским". Пользуясь им, можно часто, не прибегая к теореме Пифагора, по двум данным сторонам прямоугольного треугольника найти третью его сторону. Так, если требуется найти гипотенузу прямоугольного треугольника по данным катетам 12 *см* и 16 *см*, то, заметив, что 12 и 16 равнократны 3 и 4, ибо $12 = 3 \cdot 4$ и $16 = 4 \cdot 4$, находим гипотенузу $5 \cdot 4$. Точно так же, если даны катеты 21 *м* и гипотенуза 35 *м*, то, заметив, что $21 = 3 \cdot 7$ и $35 = 5 \cdot 7$, мы утверждаем, что другой катет будет $4 \cdot 7$, т. е. 28 *м*. Этими соображениями следует пользоваться для ускорения решения задачи. Кроме тройки: 3, 4 и 5 и равнократных ей 6, 8, 10; 9, 12, 15; 12, 16, 20 и т. д. существует еще множество других троек целых чисел: 5, 12, 13; 8, 15, 17 и т. д., которыми измеряются стороны прямоугольного треугольника.

Можно показать учащимся, как получить формулу, которая дает бесчисленное множество „пифагоровых" троек. Учащиеся должны убедиться в справедливости тождества:

$$(m + n)^2 - (m - n)^2 = 4mn,$$

разложив левую часть на множители. Заменив m через x^2 и n через y^2, имеем,

$$(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)^2 = 4x^2y^2,$$

или

$$(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)^2 = (2xy)^2,$$

и, полагая $y = 1$, получаем:

$$(x^2 + 1)^2 - (x^2 - 1)^2 = (2x)^2.$$

Эта формула показывает, что если гипотенуза треугольника — число, превышающее квадрат любого числа на единицу, то катеты его: один на единицу

меньше квадрата того же числа, а другой — удвоенное данное число. Это так называемая формула четного числа.

Так, для $x=2$ имеем: $5^2-3^2=4^2$ — основная тройка;
для $x=3$, $10^2-8^2=6^2$ — производная тройка;
для $x=4$, $17^2-15^2=8^2$ — основная тройка;
для $x=5$, $26^2-24^2=10^2$ — производная тройка;
для $x=6$, $37^2-35^2=12^2$ — основная тройка и т. д.,

т. е. при всяком x четном мы получаем основные тройки чисел. Из производных троек можно получить и основные, если все числа разделить на их общий наибольший делитель. Так, из тройки 26, 24 и 10 получается основная, если каждое из трех чисел разделить на 2. Действительно, $13^2-12^2=5^2$.

На основании приведенной выше формулы можно составить таблицу пифагоровых чисел:

x	2	3	*	4	5	*	6	7	*	8	9	*	10	11	*	12	13	*	14
c	5	10	5	17	26	13	37	50	25	65	82	41	101	122	61	145	170	85	197
b	3	8	4	15	24	12	35	48	24	63	80	40	99	120	60	143	168	84	195
a	4	6	3	8	10	5	12	14	7	16	18	9	20	22	11	24	26	13	28

Таблицу эту можно продолжить как угодно далеко. Если преподаватель желает задать устные вопросы на вычисление катета по гипотенузе и другому катету, то удобнее всего брать тройки чисел, отмеченные в таблице звездочкой и полученные из предшествующего им столбца путем деления на 2. Гипотенуза здесь отличается от катета на 1, и потому другой катет легко вычисляется: например:

$$a=\sqrt{61^2-60^2}=\sqrt{(61+60)(61-60)}=\sqrt{121\cdot 1}=11.$$

Пример. $b=84$, $c=85$, тогда

$$a=\sqrt{85^2-84^2}=\sqrt{(85+84)\cdot(85-84)}=\sqrt{169\cdot 1}=13.$$

Кроме аналитического доказательства теоремы Пифагора, приведенного выше, имеется еще около 90 различных доказательств. Это обилие доказательств объясняется тем, что в прошлом для получения звания „магистра“ математики требовалось представление нового доказательства теоремы Пифагора.

Необходимо, чтобы пользование формулами, устанавливающими числовую зависимость между линейными элементами прямоугольного треугольника, стало твердым навыком учащихся; вместе с тем учащиеся должны помнить, что основной теоремой этого раздела является теорема: *высота прямоугольного треугольника делит его на два подобных треугольника, подобных данному треугольнику,* что все остальные теоремы непосредственно получаются из рассмотрения подобия тех же трех треугольников и что знание теорем, вытекающих из основной теоремы, значительно упрощает решение многих вопросов.

§ 17. Метрическая зависимость между элементами косоугольных треугольников и отрезками в круге. Алгебраический метод решения задач на построение.

1. Наличие зависимости между сторонами прямоугольного треугольника, естественно, вызывает вопрос, нет ли также определенной зависимости между сторонами остроугольного и тупоугольного треугольников. Использование следующей модели поможет выяснению этого вопроса.

На фанере начерчен прямоугольный треугольник ABC, его угол C равен $90°$ (рис. 345); если сторона $AC = 21$ *см* и сторона $BC = 20$ *см*, то $AB = \sqrt{20^2 + 21^2} = \sqrt{400 + 441} = \sqrt{841} = 29$ *см*.

В вершине A вбит гвоздик и к нему прикреплена нитка с грузом; эта нитка при горизонтальном положении BC будет направлена по катету AC, так что $AB^2 = BC^2 + AC^2$.

Рис. 345.

Катет BC продолжен за вершину прямого угла, и на нем и на его продолжении вбиты гвоздики на расстоянии 1 *см* друг от друга, начиная от вершины B.

Если перекинуть нитку с грузом через гвоздик C_1, то можно получить остроугольный треугольник ABC_1.

Если перекинуть нитку с грузом через гвоздик C_2, вбитый между B и C, то можно получить тупоугольный треугольник ABC_2.

Воспользуемся рисунком 345 для вывода зависимости между сторонами остроугольного и тупоугольного треугольников.

1) Известно, что $AB^2 = BC^2 + AC^2$; но $BC_1 > BC$ и $AC_1 > AC$ и потому $AB^2 < BC_1^2 + AC_1^2$, а это означает, что

квадрат стороны треугольника, лежащей против острого угла, меньше суммы квадратов двух других сторон его.

Следует определить, насколько сумма $BC_1^2 + AC_1^2$ больше суммы $BC^2 + AC^2$, равной AB^2.

$$\begin{cases} BC^2 = (BC_1 - CC_1)^2 \\ AC^2 = AC_1^2 - CC_1^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} BC^2 = BC_1^2 + CC_1^2 - 2BC_1 \cdot CC_1 \\ AC^2 = AC_1^2 - CC_1^2 \end{cases}$$

Суммируя почленно обе части полученных равенств, имеем:

$$BC^2 + AC^2 = BC_1^2 + AC_1^2 - 2BC_1 \cdot CC_1,$$

но $BC^2 + AC^2 = AB^2$, а потому $AB^2 = BC_1^2 + AC_1^2 - 2BC_1 \cdot CC_1$.

Итак, **квадрат стороны треугольника, лежащей против острого угла, меньше суммы квадратов двух других сторон треугольника на удвоенное произведение одной из его сторон BC_1 на проекцию CC_1 другой стороны AC_1 на первую BC_1.**

Выразим в формуле $AB^2 = BC^2 + AC^2$ стороны BC и AC через BC_2 и AC_2; имеем:

$$\begin{cases} BC^2 = (BC_2 + CC_2)^2 \\ AC^2 = AC_2^2 - CC_2^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} BC^2 = BC_2^2 + CC_2^2 + 2BC_2 \cdot CC_2 \\ AC^2 = AC_2^2 - CC_2^2 \end{cases}$$

Суммируя почленно обе части полученных равенств, получим:

$$BC^2 + AC^2 = BC_2^2 + AC_2^2 + 2BC_2 \cdot CC_2.$$

Значит,

$$AB^2 = BC_2^2 + AC_2^2 + 2BC_2 \cdot CC_2.$$

Итак, квадрат стороны треугольника, лежащей против тупого угла, больше суммы квадратов двух других его сторон на удвоенное произведение одной из этих сторон на проекцию другой стороны на нее.

После рассмотрения приведенных доказательств последних двух теорем можно проследить по модели за переходом одного вида треугольника в другой и в связи с этим за изменением длины стороны AC в зависимости от угла, против которого она лежит; дальше можно предложить учащимся привести доказательство теорем, руководствуясь указаниями стабильного учебника.

Пользуясь принятыми обозначениями, запишем полученные формулы так:

1) когда $\angle A$ — острый, $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c_b$ или $a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot b_c$,

2) „ $\angle A$ — прямой, $a^2 = b^2 + c^2$,

3) „ $\angle A$ — тупой, $a^2 = b^2 + c^2 + 2b \cdot c_b$ или $a^2 = b^2 + c^2 + 2c \cdot b_c$.

Необходимо показать учащимся, что $c \cdot b_c = b \cdot c_b$, а потому безразлично, какую из двух сторон мы проектируем на другую сторону: b на c или сторону c на b. Действительно, прямоугольные треугольники BEA и CDA (рис. 346) подобны, так как $\angle A$ у них общий, а потому

$$\frac{b_c}{b} = \frac{c_b}{c}, \text{ откуда } b_c \cdot c = b \cdot c_b.$$

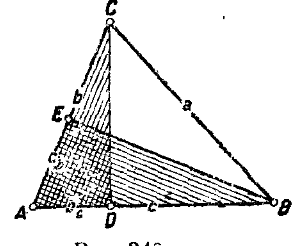


Рис. 346.

Следует обратить внимание учащихся на то, что во все три формулы входят члены a^2, b^2 и c^2 и что формула $a^2 = b^2 + c^2$ представляет собою частный случай двух остальных, так как для прямоугольного треугольника проекции b_c или c_b, т. е. проекция катета на катет, равна нулю.

Если учащиеся знакомы с направленными отрезками, то, считая направление проекции от высоты к вершине рассматриваемого угла за положительное, а противоположное — за отрицательное направление, можно обобщить все три теоремы в одну:

квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение одной из этих сторон на проекцию другой стороны на нее, при этом для стороны, лежащей против острого угла, удвоенное произведение положительно, для прямого угла оно равно нулю, а для тупого оно отрицательно.

2. Если зависимость между сторонами треугольника a, b и c выражается формулой $a^2 = b^2 + c^2$, то треугольник прямоугольный и a — его гипотенуза.

Докажем, что если $a^2 > b^2 + c^2$, то сторона a лежит против тупого угла, т. е. треугольник тупоугольный.

В самом деле, если допустить, что a не лежит против тупого угла, то a может лежать или против прямого или против острого угла, но в таком случае или $a^2 = b^2 + c^2$ или $a^2 < b^2 + c^2$; но то и другое противоречит условию: $a^2 > b^2 + c^2$, и потому невозможно допущение, что a не лежит против тупого угла. Значит, при условии $a^2 > b^2 + c^2$ сторона a лежит против тупого угла и, следовательно, треугольник тупоугольный.

Так же доказывается, что если a — бóльшая сторона треугольника, то при условии $a^2 < b^2 + c^2$ треугольник — остроугольный. Поэтому, если даны стороны треугольника a, b и c и известно, что a — наибольшая из них, то всегда можно выяснить, в зависимости от того, будет ли

$$a^2 < b^2 + c^2, \quad \text{или} \quad a^2 = b^2 + c^2, \quad \text{или} \quad a^2 > b^2 + c^2,$$

дан ли остроугольный, прямоугольный или тупоугольный треугольиик.

Следует, однако, помнить, что приведенные условия — условия необходимые, но недостаточные.

Пример. Дан треугольник со сторонами 4, 5 и 10. Определить вид треугольника.

Неравенство $10^2 > 5^2 + 4^2$ позволяет утверждать, что треугольник — тупоугольный. Однако при попытке построить треугольник со сторонами 4, 5 и 10 мы натолкнулись бы на невозможность его построеиня, так как $10 > 5 + 4$, что указывает на то, что треугольника с такими сторонами не существует. Отсюда вывод: прежде чем приступить к решению или к построеиию треугольника, необходимо по отношению к его большей стороне проверить справедливость следующих соотношений:

1) $a < b + c$ и 2) $a^2 < b^2 + c^2$, или 3) $a^2 = b^2 + c^2$, или 4) $a^2 > b^2 + c^2$.

Приведенная задача предлагается для устного решения; иа доске записываются только числа 4, 5 и 10, и учащиеся должны решать задачу устно, ие прибегая к записи.

3. После решения ряда задач и примеров следует проверить знания учащихся небольшой работой, минут на 20 — 30. Темой для работы могут служить примерно следующие вопросы:

1) Если стороны треугольиика равны:

а) 3, 5, 7, то треугольник .....;
б) 3, 5, 9, то треугольиик .....;
в) 6, 8, 10, то треугольник ... .;
г) 6, 8, 13, то треугольник .....;

2) Две стороны треугольника $a = 5$, $b = 6$ и угол между ними $\gamma = 60°$ (120°). Определить третью сторону c.	$c =$
3) Стороны параллелограма равны 3 *см* и 4 *см*; угол его $\alpha = 30°$. Вычислить диагонали d_1 и d_2.	$d_1 =$ $d_2 =$

Следует отметить, что небольшие проверочные работы помогают преподавателю во-время выяснить имеющиеся у учащихся недочеты и их исправить. Одновременно обращается внимание: 1) на четкий чертеж,— он также служит проверкой решения, 2) на запись решения. Целесообразно иметь в математическом кабинете набор готовых карточек с вопросами по определенным разделам курса, что позволит преподавателю без особой затраты времени на диктовку в любой момент раздать учащимся темы для работы.

Помимо таких небольших работ важно в самом начале урока предлагать учащимся несколько устных вопросов на пройденное, подводящих их к новому разделу курса.

4. Большинство нижеприводимых задач следует проработать с учащимися в классе; все эти задачи основываются на разобранных ранее теоремах.

Теорему о сумме квадратов диагоналей параллелограма можно предварить следующей задачей:

Две силы, P и Q, данные по величине и направлению (рис. 347), действуют на материальную точку M. Определить равнодействующую этих сил R, если известно, что угол между направлениями данных сил равен 120°.

Прежде всего учащиеся должны дать четкий чертеж. Если они еще не знакомы с параллелограмом сил, то преподаватель, дав нужное пояснение, решает задачу вместе с учащимися. Рассматривая треугольник AMC, находим:

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2P\frac{Q}{2} = P^2 + Q^2 - PQ,$$

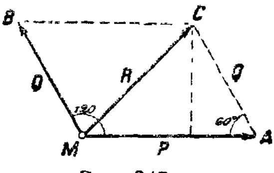


Рис. 347.

так как проекция Q на P равна $\frac{Q}{2}$. При решении этого вопроса следует использовать модель параллелограма с раздвижными диагоналями, чтобы разобрать отдельно случаи: 1) когда угол между направлениями сил тупой, и предельный случай, когда угол равен 180°; 2) когда угол между направлениями сил острый, и предельный случай, когда он равен нулю.

5. После решения приведенной выше задачи следует предложить учащимся самостоятельно доказать теорему:

сумма квадратов диагоналей параллелограма равна сумме квадратов всех его сторон.

Учащиеся записывают то, что дано, и то, что требуется доказать, и под руководством преподавателя выводят, что

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Вывод теоремы закрепляется решением числовых примеров.

Примеры. 1) По сторонам параллелограма $a = 6{,}0$ и $b = 7{,}0$ и одной из диагоналей его $d_1 = 11$ найти другую диагональ.

2) По диагоналям параллелограма $d_1 = 7$ и $d_2 = 9$ и одной его стороне $a = 4$ вычислить другую сторону параллелограма.

Приступая к решению обеих задач, учащиеся должны предварительно убедиться в том, возможна ли задача. Так, для решения первой задачи необходимо, чтобы $d_1 < a + b$, для второй — чтобы $a < \frac{d_1 + d_2}{2}$. Набросок нужного чертежа следует строить согласно ранее данным указаниям, т. е. сперва провести диагонали, а затем уже строить параллелограм. Для соблюдения размеров, данных в условии задачи, нужно в обоих случаях начинать с построения одного из четырех треугольников, на которые параллелограм разбивается диагоналями.

Вычисление медиан треугольника.

6. На основании доказанной теоремы вычисляется и медиана треугольника по трем данным его сторонам a, b и c. Преподавателем дается учащимся указание о продолжении медианы m_a на отрезок, равный медиане (рис. 348), и построении параллелограма.

Формулу $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ следует внимательно разобрать, обратив внимание учащихся на ее структуру:

1) коэфициент $\frac{1}{2}$ перед корнем соответствует определению медианы, делящей сторону пополам;

2) соблюдается алфавитный порядок букв: $a \to b \to c$.

Необходимо указать учащимся на использование круговой подстановки (рис. 349):

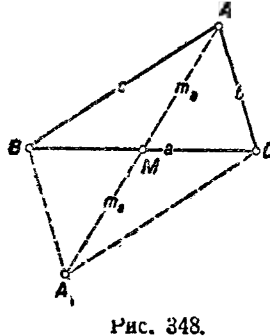


Рис. 348.

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2},$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2},$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

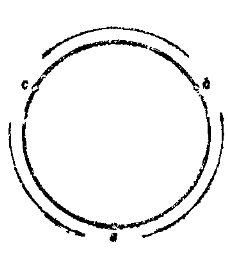


Рис. 349.

для получения по аналогии с выведенной формулой соответствующих формул для двух остальных медиан.

Обратив внимание учащихся на то, что индексу при m соответствует последний вычитаемый член, предлагается им записать на доске выражение для любой медианы треугольника по трем данным сторонам треугольника.

Примеры. 1) В треугольнике ABC стороны $a = 7,0$, $b = 11$ и медиана $m_c = 6,0$. Найти c.

Для решения этой задачи напишем формулу для медианы в таком виде:

$$4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2,$$

откуда

$$c^2 = 2a^2 + 2b^2 - 4m_c^2 = 98 + 242 - 144 = 196 \text{ и } c = \sqrt{196} = 14.$$

2) Основания трапеции $a = 18$ и $b = 6,0$, боковые стороны $c = 11$ и $d = 7,0$. Найти среднюю линию оснований.

Следует указать учащимся, что для решения задачи нужно использовать метрическую зависимость между элементами треугольника и что добавочным построением необходимо получить треугольник. Учащиеся могут продолжить боковые стороны трапеции до их взаимного пересечения чтобы получить треугольник. Сделав построение, учащиеся заметят, что отрезки MD и MC (рис. 350) могут быть определены из подобия треугольников:

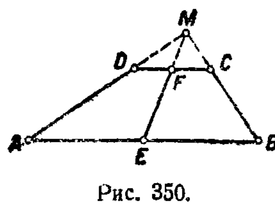


Рис. 350.

$$\frac{AM}{MD} = \frac{18}{6,0} = 3,0, \text{ или } \frac{11 + MD}{MD} = 3,0, \text{ или } \frac{11}{MD} + 1 = 3,0 \text{ и } \frac{11}{MD} = 2,0,$$

откуда

$$MD = \frac{11}{2,0} = 5,5;$$

точно так же определяется и MC; $MC=\frac{7,0}{2}=3,5$. Убедившись затем, что AM в 3 раза больше MD, учащиеся находят, что $MD=\frac{1}{3}AM$ и $AD=\frac{2}{3}AM$.

После этого определяется медиана ME треугольника AMB:

$$ME=\frac{1}{2}\sqrt{16,5^2\cdot 2+10,5^2\cdot 2-18^2}=\frac{1}{2}\sqrt{544,5+220,5-324}=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{441}=\frac{1}{2}\cdot 21=10,5.$$

Определив $ME=10,5$, учащиеся, исходя из подобия треугольников, находят, что $FE=\frac{2}{3}\cdot 10,5=\frac{10,5\cdot 2}{3}=7,0$.

При решении задачи указанным приемом может возникнуть вопрос: пересекутся ли боковые стороны BC и AD и средняя линия EF при своем продолжении в одной и той же точке M, ибо, если это не имеет места, то приведенное решение неверно. Что все три прямые пересекаются в одной точке M, можно доказать следующим образом.

Пусть точка M — точка пересечения EF и BC; тогда из подобия треугольников EMB и FMC имеем:

$$\frac{EB}{FC}=\frac{EM}{MF}.$$

Пусть точка M_1 — точка пересечения AD и EF; тогда из подобия треугольников EM_1A и FM_1D имеем:

$$\frac{AE}{DF}=\frac{EM_1}{FM_1}, \quad \text{но} \quad \frac{EB}{FC}=\frac{AE}{DF},$$

следовательно

$$\frac{EM}{MF}=\frac{EM_1}{M_1F}, \quad \text{или} \quad \frac{EM-MF}{MF}=\frac{EM_1-M_1F}{M_1F}, \quad \text{или} \quad \frac{EF}{MF}=\frac{EF}{M_1F}$$

и $MF=M_1F$, т. е. точки M и M_1 совпадают.

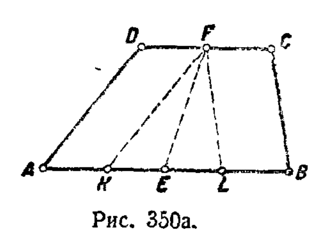


Рис. 350а.

Хотя подобного рода разбор и требует много времени, что вызвано предложенным учащимися планом решения задачи, тем не менее не следует отказываться от него, так как предложенный план решения задачи приводит к цели; учащиеся удовлетворены, они убеждаются, что могут справиться и с „трудной“ задачей, это дает им уверенность в своих знаниях.

Вслед затем следует дать более простое решение задачи: параллельным перенесением боковые стороны трапеции перемещаются так, что проходят через точку F (рис. 350а); получается треугольник KFL, в котором FE — медиана; она определяется по трем сторонам 11, 7,0 и 12 треугольника KFL по формуле:

$$FE=\frac{1}{2}\sqrt{121\cdot 2+49\cdot 2-144}=\frac{1}{2}\sqrt{196}=7.$$

Последнее решение должно убедить учащихся, что мало решить задачу — надо решить ее приемом, наиболее простым, быстро приводящим к цели. Решение задачи дожно быть изящным.

Хотя в большинстве задач, решаемых с учащимися, и подобраны „удобные“ числа, чтобы не затемнять геометрической стороны вопроса, тем не менее следует время от времени давать и „неудобные“ числа, чтобы учащиеся приучались пользоваться ими и выполнять действия над приближенными числами. Следует и при прохождении геометрии вспоминать арифметику, которую учащиеся без достаточной практики забывают.

Вычисление высот треугольника.

7. Вычисление высоты треугольника по трем заданным его сторонам, когда $a>b>c$ и $b-c<a<b+c$, дано в стабильном учебнике: $h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p=\frac{a+b+c}{2}$

Следует указать учащимся, что необходимо убедиться в том, что множители $p-a$, $p-b$ и $p-c$ — положительные числа.

Действительно, $a<b+c$, значит $a+a<a+b+c$ или $2a<2p$ и $a<p$, откуда следует, что $p-a>0$; точно так же и $p-b>0$ и $p-c>0$.

Обратив внимание учащихся на то, что в выражение каждой из высот входит одно и то же число $2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, можно легко найти, что

$$h_a:h_b:h_c=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$$

ибо на это число все члены отношений сокращаются. Итак, **высоты треугольников обратно пропорциональны соответствующим им сторонам.**

Примеры. 1) Вычислить высоты треугольника по трем его сторонам: $a=13$, $b=14$ и $c=15$.

Записав формулу для высоты $h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, следует вычислить сперва $2p$, затем p, $p-a$, $p-b$, $p-c$. Запись:

1) $a=13$	2) $p-a=8$
$b=14$	$p-b=7$
$c=15$	$p-c=6$
$2p=42$	
$p=21$	

Вычисление:

$$h_a=\frac{2}{13}\sqrt{21\cdot8\cdot7\cdot6}=\frac{2}{13}\cdot7\cdot3\cdot4=\frac{168}{13}\approx13,$$

$$h_b=\frac{2}{14}\cdot7\cdot3\cdot4=12$$

и

$$h_c=\frac{2}{15}\cdot7\cdot3\cdot4=\frac{56}{5}=11,2.$$

Проверкой может служить соотношение:

$$a:b:c=\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}.$$

2) Основания трапеции $a=9$ и $b=4$, боковые стороны $c=3$ и $d=4$. Определить высоту трапеции.

Одну из боковых сторон, $d=4$, следует перенести параллельно самой себе так, чтобы она проходила через другую вершину трапеции (рис. 351), и затем определить высоту h треугольника, стороны которого равны 3, 4 и 5. Если высота определена учащимися по приведенной выше формуле, то следует указать им на более простое решение указанной задачи. Если бы сперва испытать решаемый треугольник, т. е. узнать, справедливо ли неравенство $5 < 4 + 3$, а затем сравнить 5^2 с суммой $4^2 + 3^2$, то учащиеся убедились бы, что треугольник прямоугольный, а потому высота его определяется по теореме: *произведение катетов равно произведению гипотенузы на высоту*, откуда

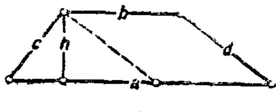


Рис. 351.

$$h_c = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2,4.$$

3) Даны основания a и b трапеции и диагонали ее d_1 и d_2 (рис. 352). Вычислить высоту трапеции.

В этом случае одна из диагоналей, например d_2, переносится параллельно в точку C, и высота h определяется из треугольника ACK, стороны которого: $a + b$, d_1 и d_2.

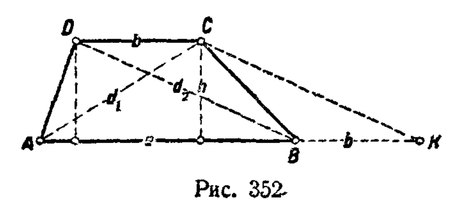


Рис. 352.

Если стороны треугольника выражены не целыми числами или целыми трех-, четырех- и т. д. многозначными числами, то лучше для выполнения вычислений высоты треугольника воспользоваться таблицами Брадиса или логарифмами или итти путем, каким выведена формула для высоты треугольника.

Пропорциональные отрезки в круге.

8. Кроме уже перечисленных выше свойств пропорциональных отрезков в круге, выведенных на основании свойств прямоугольного треугольника, необходимо остановиться еще на следующих:

1) **произведение отрезков двух пересекающихся хорд окружности есть величина постоянная, равная произведению двух отрезков диаметра, проходящего через ту же точку;**

2) **если из точки, лежащей вне круга, проведены секущие и касательная, то произведение каждой секущей на ее внешнюю часть есть величина постоянная, равная квадрату касательной.**

Эти теоремы могут быть даны учащимся для самостоятельной проработки после указаний о необходимости проведения вспомогательных хорд, нужных для образования треугольников сторонами которых были бы отрезки данных хорд или секущие и внешние их части.

Часто учащиеся сомневаются в справедливости теоремы, если дано пересечение двух таких хорд, как на рисунке 353; учащиеся обычно заявляют, что в данном случае теорема не оправдывается. Следует подобрать соответствующие числа, чтобы убедить учащихся, что теорема

всегда справедлива. Например, $AK=2$ и $KB=2$, а $KD=20$ и $KC=0{,}2$ (рис. 353). Можно, конечно, вычислить отрезок KC и не задавать его численного значения.

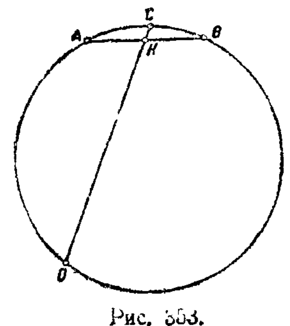


Рис. 353.

Приведенные теоремы можно объединить в одну теорему, которая верна независимо от того, будет ли точка пересечения двух прямых лежать внутри окружности круга, на окружности или вне окружности.

Необходимо первую из этих теорем прежде всего проверить на частном случае, когда хорды являются диаметрами. Такою проверкою ($R\cdot R=R\cdot R$) учащиеся убеждаются в ее справедливости (рис. 354). Второю проверкою может служить случай, когда точка пересечения хорд лежит на окружности, когда обе хорды проведены из одной точки окружности. В этом случае можно считать, что каждая хорда делится также на две части, из которых одна равна длине хорды, а другая равна нулю; произведение длины хорды на нуль равно нулю, т. е. $AB\cdot 0=AC\cdot 0$; теорема справедлива (рис. 354а).

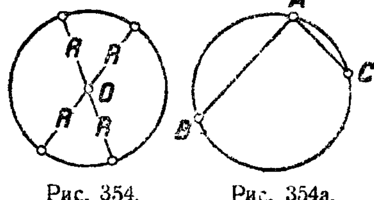


Рис. 354. Рис. 354а.

Общая формулировка обеих теорем следующая:

Если пучок прямых с центром в точке M пересечь окружностью радиуса R, то произведения отрезков каждой из прямых пучка, считая от вершины M до окружности, равны.

Если вращать прямую MB пучка или секущую MAB вокруг точки M против направления движения часовой стрелки (рис. 355), то дуга AB будет постепенно уменьшаться, отрезок же MA будет увеличиваться, а отрезок MB — уменьшаться; когда точки A и B совпадут и $MA=MB=MT=a$, тогда MT — касательная и

$$MA\cdot MB=MT^2=a^2=x^2-R^2,$$

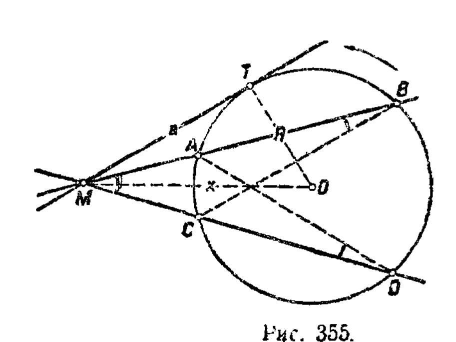


Рис. 355.

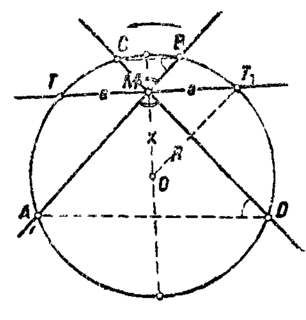


Рис. 356

где x — расстояние от вершины пучка M до центра окружности, радиус которой $OT=R$. В этом случае $x>R$, а потому $x^2-R^2>0$, т. е. число положительное.

Если вращать прямую MB пучка или хорду AB вокруг точки M против направления движения часовой стрелки (рис. 356) до тех пор, пока она не окажется перпендикулярной к диаметру окружности, проходящему через точку M, то $MA \cdot MB = MC \cdot MD = MT \cdot MT_1 = a^2 = R^2 - x^2 = -(x^2 - R^2)$, где x — расстояние от центра M пучка до центра O окружности радиуса $OT_1 = R$ и $x < R$, значит $x^2 - R^2 < 0$, т. е. число отрицательное.

Каждое из полученных произведений $MA \cdot MB$ и $MC \cdot MD$ и т. д. Штейнером было названо степенью точки M по отношению к окружности. Исходя из понятия степени точки относительно окружности, Штейнер дал следующую формулировку теоремы:

Степень внешней точки по отношению к окружности равна разности квадратов линии центров x пучка и окружности и радиуса R.

Если принять во внимание, что при внешней точке направления отрезков от вершины M одинаковы (произведение положительно), а при внутренней противоположны (произведение отрицательно), то можно сказать, что степень внешней точки положительна, $MA \cdot MB = x^2 - R^2 > 0$ для внешней точки, степень внутренней точки отрицательна, $MA_1 \cdot MB = x^2 - R^2 < 0$ для внутренней точки, степень точки на окружности равна нулю, $MA \cdot MB = R^2 - R^2 = 0$ для точки на окружности.

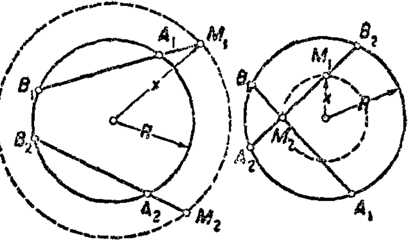


Рис. 357.

3) Следствие, вытекающее из теоремы:

точки одинаковой степени одинаково удалены от центра.

На основании этого:

геометрическое место точек одинаковой степени по отношению к данной окружности есть окружность, концентрическая с данной: радиус этой окружности равен расстоянию x точки M от центра данной окружности (рис. 357).

Вычисление биссектрисы треугольника.

9. После вычисления высоты и медианы треугольника по трем данным его сторонам, естественно, возникает вопрос о вычислении по тем же данным биссектрисы треугольника. Вопрос этот сравнительно просто решается на основании следующих соображений.

Пусть дан треугольник ABC со сторонами a, b и c (рис. 358). Проведем окружность через его вершины, а затем биссектрису CD угла C; тогда $\angle ACD = \angle DCB$, или $\angle 1 = \angle 2$. Продолжив биссектрису $CD = \beta_c$ за точку D до пересечения с окружностью в точке E, соединим точку E с A. Тогда $\triangle BCD \backsim \triangle ACE$, так как $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle CBD = \angle CEA$ как углы, опирающиеся на одну и ту же дугу CA. Если обозначить $DE = x$, то вследствие подобия треугольников BCD и ACE имеем:

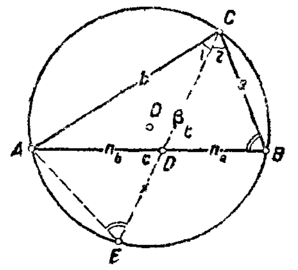


Рис. 358.

$$\frac{\beta_c}{a} = \frac{b}{\beta_c + x}, \text{ или } \beta_c^2 + \beta_c x = ab.$$

Непосредственно из рисунка видно, что $\beta_C x = n_a \cdot n_b$, где n_a и n_b — отрезки, на которые сторона c делится биссектрисой, а потому

$$\beta_C^2 = ab - n_a \cdot n_b;$$

квадрат биссектрисы угла треугольника равен разности между произведением сторон, заключающих этот угол, и произведением отрезков третьей стороны, образуемых пересечением этой стороны биссектрисой.

Отрезки третьей стороны пропорциональны двум другим прилежащим сторонам, а потому:

$$n_a = \frac{c}{a+b} \cdot a = \frac{ac}{a+b} \quad \text{и} \quad n_b = \frac{c}{a+b} \cdot b = \frac{bc}{a+b}.$$

Выразив n_a и n_b через данные стороны a, b и c треугольника, вычисляем биссектрису.

Формулу для биссектрисы можно представить в следующем виде:

$$\beta_C^2 = ab - \frac{ac}{a+b} \cdot \frac{bc}{a+b} = \frac{ab}{(a+b)^2}\left[(a+b)^2 - c^2\right] =$$
$$= \frac{ab}{(a+b)^2}(a+b+c)(a+b-c) = \frac{4abp(p-c)}{(a+b)^2}$$

или

$$\beta_C = \frac{2\sqrt{abp(p-c)}}{a+b}, \quad \beta_A = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}, \quad \beta_B = \frac{2\sqrt{cap(p-b)}}{c+a}.$$

Надо приучить учащихся по данному значению для

$$\beta_C = \frac{2\sqrt{abp(p-c)}}{a+b}$$

записать выражения для β_A и β_B; нужно, чтобы учащийся видел симметричность полученных формул.

Пример. В треугольнике $a = 5{,}0$, $c = 6{,}0$ и $b = 7{,}0$; вычислить β_C.

Треугольник возможен, ибо $7 < 5 + 6$.

Определяем сперва n_a и n_b:

$$n_a = \frac{6{,}0}{5{,}0 + 7{,}0} \cdot 5{,}0 = 2{,}5; \quad n_b = \frac{6{,}0}{5{,}0 + 7{,}0} \cdot 7{,}0 = 3{,}5.$$

После этого находим:

$$\beta_C^2 = ab - n_a n_b = 5{,}0 \cdot 7{,}0 - 2{,}5 \cdot 3{,}5 = 35 - 8{,}75 = 26{,}25,$$

откуда

$$\beta_C = \sqrt{26{,}25} \approx 5{,}1.$$

Надо предложить учащимся решить задачу и по-другому, по формуле $\beta_C = \frac{2\sqrt{abp(p-c)}}{a+b}$ для того, чтобы они имели возможность проверить себя.

Полученные формулы:

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \qquad (1)$$

$$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2, \qquad (2)$$

$$\beta_A^2 = bc - n_b n_c = bc - \frac{ab}{b+c} \cdot \frac{ac}{b+c}, \quad \text{или} \quad \beta_A = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}, \qquad (3)$$

запоминать не следует, кроме первой. Учащиеся должны знать, что имеются формулы, по которым вычисляются и m_a и β_A, и, в случае надобности, они могут обратиться к справочнику.

Формулы позволяют решить целый ряд задач. Так, по формуле (1) можно по данным a, b и h_a найти третью сторону c, затем остальные высоты; по формуле (2) по данным b, c и m_a найти третью сторону a треугольника; по формуле (3) по данным b, c и β_A найти третью сторону a и т. д.

Вычисление радиуса описанной окружности.

10. Следует также показать учащимся, как по трем данным сторонам треугольника вычисляют радиусы вписанной, описанной и приписанной окружностей.

Для определения радиуса описанной окружности берется треугольник ABC (рис. 359), высота треугольника h_c и диаметр EC описанной окружности.

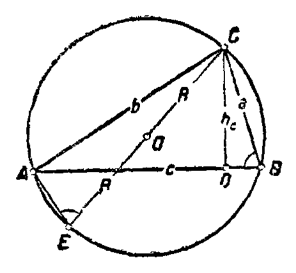


Рис. 359.

Из подобных треугольников AEC и CDB находим:

$$\frac{a}{h_c}=\frac{2R}{b},$$

откуда $ab=2Rh_c$. Итак,

произведение двух сторон треугольника равно произведению диаметра описанной окружности на высоту треугольника, проведенную к третьей стороне.

Если $\angle C=90°$, то $c=2R$, и тогда данная формула обращается в известную формулу для прямоугольного треугольника:

$$ab=ch_c.$$

Из формулы $ab=2Rh_c$ находим:

$$R=\frac{ab}{2h_c}, \quad \text{или} \quad 2R=\frac{ab}{h_c}=\frac{abc}{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Следует обратить внимание учащихся на то, что из формулы $2R=\frac{ab}{h_c}$ видно, что с изменением a, если b и h_c — постоянные, изменяется и диаметр, притом — пропорционально изменению a; то же относится к b, если a и h_c — постоянные; с увеличением же или с уменьшением h_c в несколько раз диаметр, наоборот, уменьшается или увеличивается во столько же раз. Итак, диаметр описанной около треугольника окружности пропорционален сторонам a и b и обратно пропорционален высоте h_c третьей стороны c треугольника, если остальные компоненты остаются постоянными.

Учащимся должно быть указано и на размерность формул. Так, в последней формуле $2R$ — отрезок и, следовательно, первого измерения; в дроби $\frac{ab}{h_c}$ числитель второго измерения, а знаменатель первого измерения, следовательно сама дробь первого измерения, а потому равенство возможно. Такой разбор дает возможность учащемуся контролировать правильность полученного вывода.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Для данного треугольника построены вписанная и приписанная окружности. Радиус которой из них больше?

2. Возможно ли, чтобы в треугольнике сторона равнялась его полупериметру?

3. Как разбить прямоугольный треугольник на два подобных треугольника?

4. В каком треугольнике центр описанной окружности лежит на стороне треугольника?

5. В каком треугольнике ортоцентр совпадает с вершиной треугольника?

6. По данным сторонам $a = 5{,}0$, $b = 7{,}0$ и $c = 11$ *м* вычислить медиану m_c треугольника.

7. По данным сторонам $a = 4{,}0$, $b = 13$ и $c = 15$ *дм* вычислить h_a и R.

8. По данным сторонам $a = 13$, $b = 14$ и $c = 15$ *см* вычислить r.

9. Стороны треугольника $a = 3$, $b = 5$ и $c = 7$ *м*; определить наибольший угол треугольника.

10. Дана формула биссектрисы треугольника: $\beta_C^2 = ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right)$. Написать формулы для β_A и β_B.

11. В треугольнике сторона $a = 2$, $\angle B = 45°$ и $\angle C = 30°$. Вычислить b и c.

Указания к контрольным вопросам.

1. Вопрос для устного ответа. Обе окружности касаются двух сторон треугольника, центр приписанной окружности дальше отстоит от вершины угла, а потому радиус ее больше.

2. Вопрос для устного ответа. Разности $p - a$, $p - b$ и $p - c$ больше нуля, а потому $a < p$, $b < p$ и $c < p$. В самом деле, если бы, например, $a = p$, то и $b + c = p$, и тогда $a = b + c$, что невозможно.

3. Ответ на вопрос разобран в книге, в разделе „Метрические соотношения в треугольнике".

4. Если центр описанной окружности лежит на стороне треугольника, то сторона является диаметром, а потому противолежащий этой стороне угол прямой и треугольник прямоугольный.

5. В прямоугольном, ибо катеты его служат высотами и пересекаются в вершине прямого угла, через которую проходит и третья высота треугольника.

6 — 8. Задачи решаются по готовым формулам. Ответы: 6) $m_c \approx 2{,}6$ *м*, 7) $h = 12$ *дм*; $R \approx 8{,}1$ *дм*, 8) $r = 4$ *см*.

Рис. 360.

9. Решение задачи следует выполнить в следующем порядке:

Сперва необходимо определить, возможен ли треугольник по заданной длине сторон; кроме того $7^2 > 3^2 + 5^2$, а потому треугольник тупоугольный.

Затем следует провести $AN \perp BC$ (рис. 360) и найти $CN = x$ по формуле:

$$7^2 = 5^2 + 3^2 + 2 \cdot 3\,x, \quad x = \frac{49 - 25 - 9}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}.$$

Итак, $CN = \frac{AC}{2}$, а потому $\angle CAN = 30°$, а $\angle ACN = 60°$ и $\angle ACB = 120°$

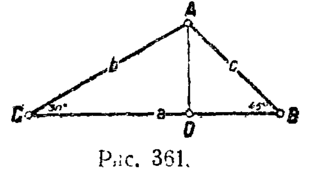


Рис. 361.

При решении этой задачи следует указать учащимся, что геометрия позволяет определить только ограниченное число углов треугольника, так если, например, в прямоугольном треугольнике данный катет равен половине гипотенузы или равен другому катету; точно так же можно решить треугольник по двум сторонам и углу (или по стороне и двум углам) при условии, если даны „особые" углы, а именно углы в 30, 45, 60, 120, 135, 150° и т. п. Во всех тех случаях, когда вычислительные средства геометрии не позволяют вычислить величину угла, необходимо прибегнуть к тригонометрии.

11. $\angle A = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$ (рис. 361); треугольник тупоугольный.

$$AD = \frac{b}{2} = DB \text{ и } CD = a - \frac{b}{2}.$$

Из треугольника ADC имеем:

$$b^2 - \frac{b^2}{4} = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2,$$

или

$$3b^2 = 4a^2 - 4ab + b^2; \quad 2b^2 + 4ab - 4a^2 = 0;$$

$$b^2 + 2ab - 2a^2 = 0; \quad b_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 + 2a^2};$$

$$b_1 = -a + a\sqrt{3} = a(\sqrt{3} - 1); \quad b_2 = -a - a\sqrt{3} = -a(\sqrt{3} + 1).$$

Второй, отрицательный корень уравнения, как не соответствующий условию задачи, отпадает.

Сторону c находим из треугольника ADB:

$$c^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{4}, \quad \text{или} \quad c^2 = \frac{a^2(\sqrt{3} - 1)^2}{2},$$

откуда

$$c = \frac{a(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{2}}.$$

Итак,

$$b = 2(\sqrt{3} - 1) \approx 2 \cdot 0{,}732 = 1{,}464 \approx 1{,}5;$$

$$c = \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) \approx 1{,}414 \cdot 0{,}732 \approx 1{,}035 \approx 1.$$

Метод алгебраического анализа и его применение к решению задач на построение.

11. Учащиеся умеют строить отрезки x, y, z и т. д. по данным отрезкам a, b, c, d, e..., зависимость между которыми дается формулами:

1) $x = \frac{ab}{c}$; 2) $x = \frac{a^2}{b}$; 3) $x = \sqrt{ab}$.

4) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$; 5) $x = \sqrt{a^2 \pm bc}$;

6) $x = \sqrt{ab \pm cd}$.

Подобного рода задачи на построение решаются так называемым *методом алгебраического анализа.*

Приводим две задачи, решаемые методом алгебраического анализа.

Задача 1. Построить треугольник, если даны: сторона треугольника c, противолежащий ей угол C и радиус r вписанной окружности.

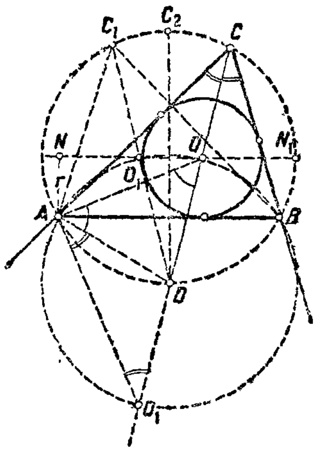


Рис. 362.

Анализ. Если построить на отрезке, равном c, сегмент, вмещающий данный угол C, то вершина C принадлежит геометрическому месту точек, из которых данный отрезок виден под углом C. Остается найти еще другое геометрическое место, которому принадлежит вершина C искомого треугольника.

Допустим, что задача решена и искомый треугольник построен; AB (рис. 362) —сто-

рона треугольника, равная c; ABC — сегмент, вмещающий угол C. Пусть O — центр вписанной окружности; тогда CD — биссектриса угла C. Проведем еще биссектрису AO. $\smile AD = \smile DB$, точка D — середина дуги AB, ее всегда можно найти построением, поскольку дуга AB построена. В треугольнике AOD $\angle OAD = \angle OAB + \angle BAD = \frac{A}{2} + \frac{C}{2}$, ибо $\angle BAD = \angle BCD$ как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу: одновременно $\angle AOD$ равен $\frac{A}{2} + \frac{C}{2}$ как внешний угол треугольника AOC, а потому $DA = DO$; следовательно, центр O окружности, вписанной в треугольник ABC, должен лежать на окружности, центр которой находится в точке D и радиус которой равен хорде DA; с другой стороны, точка O должна отстоять от AB на расстояние, равное r.

Порядок построения: 1) $AB = c$; 2) сегмент, вмещающий данный угол C; 3) точка D — середина дуги AB; 4) окружность с центром в точке D и радиуса DA; 5) перпендикуляр к AB в произвольной точке, например в точке A, и $AN = r$; 6) $NN_1 \parallel AB$; 7) точка O пересечения параллели NN_1 с окружностью с центром в D и радиуса AD — искомый центр; 8) DO, продолженная до окружности, даст вершину C.

Доказательство. Треугольник ABC — искомый, так как $AB = c$ по построению; $\angle C$ — данный и $AN = r$ — радиус вписанной в треугольник ABC окружности.

Исследование. Центр O — точка пересечения окружности D радиуса DA с прямой NN_1. Если эта окружность пересечет прямую NN_1 в двух точках O и O_1, то получатся два треугольника, треугольник ABC и треугольник ABC_1; оба треугольника симметричны и равны; если окружность D коснется стороны NN_1, то получится один треугольник ABC, — равнобедренный; если, наконец, окружность не коснется стороны NN_1 и не пересечет ее, то не получится ни одного решения.

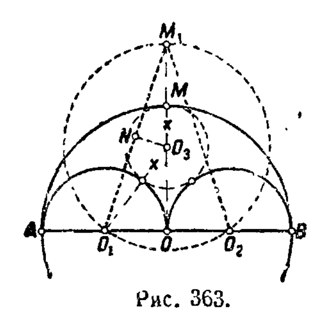


Рис. 363.

Задача 2. Дана полуокружность AMB, диаметр ее $AB = 2R$, и внутри нее на ее радиусах построены две полуокружности. Построить окружность, касающуюся данных трех полуокружностей.

Анализ. Допустим, что построение выполнено (рис. 363). Соединив центры O, O_1 и O_3 окружностей, рассмотрим прямоугольный треугольник OO_1O_3; в нем $OO_1 = \frac{R}{2}$, $O_1O_3 = \frac{R}{2} + x$, где x — радиус искомой окружности, $OO_3 = R - x$, а потому

$$\left(\frac{R}{2} + x\right)^2 = \left(R - x\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2.$$

Решая это уравнение относительно x, находим, что $x = \frac{R}{3}$. Проведенный алгебраический анализ дает простой способ решения задачи.

Построение. Проводим $OM \perp O_1O_2$ и делим OM на три равные части; точку деления O_3 принимаем за центр окружности радиуса $MO_3 = \frac{R}{3}$ и строим искомую окружность.

Данную задачу можно решить и чисто геометрическим построением, приемом, который можно использовать и в других случаях.

Анализ. Пусть задача решена, и проведена окружность с центром в точке O_3 (рис. 363). Допустим, что радиус окружности с центром O_3 увеличивается и возрастает до тех пор, пока окружность не пройдет через центры O_1 и O_2 малых полуокружностей. Ясно, что при таком допущении радиус искомой окружности увеличился на $\frac{R}{2}$ и, следовательно, проведенная вспомогательная окружность пересечет ось симметрии OM в точке M_1, лежащей выше точки M пересечения большого полукруга с осью симметрии на отрезок, равный $\frac{R}{2}$. Таким образом, определены три точки вспомогательной окружности; после этого нахождение центра выполняется обычным построением, тем более что одна из медиатрис, а именно OM, уже проведена.

Построение. Проводим $OM \perp O_1O_2$ (рис. 363) и продолжаем OM за точку M на расстояние $\frac{R}{2}$ до точки M_1; соединив точки M_1 с O_1, проводим медиатрису NO_3 отрезка M_1O_1; точка пересечения медиатрисы NO_3 с осью OM дает искомый центр O_3 окружности, радиус которой равен O_3M.

12. ***Теорема Птоломея*: произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений противолежащих сторон четырехугольника.**

Теорема Птоломея (II в.) возникла в связи с первыми проблемами тригонометрии.

Теорема эта не включена в программу средней школы и обычно не приводится в учебниках элементарной геометрии; теорема редко используется при решении геометрических вопросов прикладного характера; все же ряд задач, как показано ниже, весьма просто решается с ее помощью.

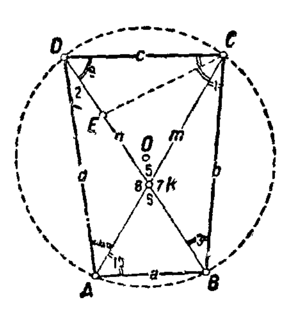


Рис 364.

Доказательство теоремы Птоломея: вычерчивают окружность, выбирают на ней произвольные четыре точки A, B, C, D, но так, чтобы точки не лежали на концах двух диаметров, и не получился бы прямоугольник или квадрат, так как теорема доказывается для любого вида четырехугольника; затем соединяют взятые точки попарно хордами; получается четырехугольник $ABCD$, диагонали которого AC и BD (рис. 364).

Для выявления числовой зависимости между сторонами и углами — а так именно ставится вопрос — в полученной фигуре отыскиваются равные или подобные треугольники. О каких-либо равных треугольниках в данном случае не может быть и речи, ибо в условии теоремы не указано равенство хотя бы двух отрезков, что является необходимым условием равенства треугольников, поэтому необходимо искать подобные треугольники. Однако в условии теоремы ничего не говорится и о пропорциональности сторон, а потому следует в полученной фигуре искать равные углы в таких треугольниках, стороны которых одновременно явля-

ются диагоналями четырехугольника. Исходя из этих соображений треугольники BKC и AKD, а также треугольники CKD и AKB, в которых $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ и т. д. — равные вписанные углы и $\angle 5 = \angle 6$, $\angle 7 = \angle 8$ — углы противоположные, хотя и подобны, но не дают требуемой теоремой зависимости; треугольники же ABC, BCD, CDA и DAB, содержащие диагонали четырехугольника, не подобны. Для решения вопроса следует на стороне CD, при одном из концов ее, например при вершине C, построить внутри $ABCD$ угол, равный углу $BCA = \angle 1$, и тогда $\triangle CDE \sim \triangle ABC$, так как эти треугольники имеют по два равных угла: $\angle DCE = \angle 1$ по построению и $\angle 9 = \angle 10$; подобными являются также треугольники CDA и CEB, у которых по два равных угла: $\angle 3 = \angle 4$ и $\angle ECB = \angle DCK$, так как $\angle ECB = \angle ECK + \angle 1$ и $\angle DCK = \angle ECK + \angle DCE$ ($\angle DCE = \angle 1$).

Из подобия треугольников CDE и ABC имеем: $c:DE = m:a$.

Из подобия треугольников CDA и CEB имеем: $b:BE = m:d$, откуда

$$ac = m \cdot DE \quad \text{и} \quad bd = m \cdot BE.$$

В оба эти равенства входят четыре стороны a, b, c и d и диагональ m, нет только диагонали n, однако сумма отрезков DE и BE равна второй диагонали n; $DE + BE = n$; сложив полученные равенства, имеем:

$$ac + bd = m(DE + BE), \quad \text{или} \quad mn = ac + bd.$$

Итак, произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений противолежащих сторон.

Обычно избегают пользоваться приемом доказательства, примененным здесь, так как учащийся идет при этом только ощупью, руководимый все время преподавателем, и это неудивительно: искусственный прием доказательства с помощью добавочного построения не может быть самостоятельно осилен учащимся.

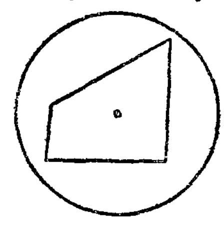


Рис. 365.

Теорема Птоломея есть теорема о диагоналях вписанного, или хордиального, четырехугольника. Полагаем, что термин „хордиальный“ четырехугольник, завоевавший себе прочное место в немецкой математической литературе, более приемлем, нежели термин „вписанный“; термин хордиальный четырехугольник указывает на то, что стороны четырехугольника — хорды. Нередко на предложение вписать в окружность четырехугольник учащиеся дают чертеж, приведенный на рисунке 365; наоборот, если учащимся предлагается построить хордиальный четырехугольник, они всегда дают правильный чертеж: стороны четырехугольника — хорды.

13. Примеры задач, решаемых с помощью теоремы Птоломея.

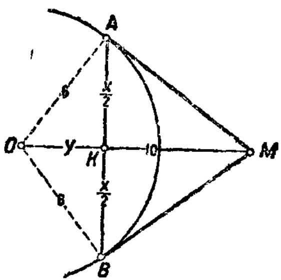


Рис. 366.

Задача 3. Из внешней точки M, отстоящей от центра O окружности радиуса $R = 6$ *см* на расстоянии $MO = 10$ *см*, проведены касательные MA и MB. Найти расстояние AB между точками касания (рис. 366).

Если учащиеся не знакомы с теоремой Птоломея, то решение следующее: сперва находят отрезок y — проекцию катета AO на гипотенузу: $10:6=6:y$; $y=3,6$, а затем $\frac{x}{2}$ из треугольника AKO:

$$\frac{x^2}{4}=6^2-3,6^2,\quad \frac{x}{2}=\sqrt{(6+3,6)(6-3,6)}=\sqrt{9,6\cdot 2,4}=4,8;$$

откуда $x=9,6$.

Другое решение задачи следующее:

$$AM=\sqrt{10^2-6^2}=\sqrt{16\cdot 4}=8.$$

Но четырехугольник $AOBM$ — хордиальный, $\angle OAM=\angle OBM=d$, а потому на основании теоремы Птоломея $10\cdot x=6\cdot 8+6\cdot 8$,

$$10x=96 \text{ и } x=9,6.$$

Задача 4. Вычислить диагональ равнобедренной трапеции, основание которой: $a=5$, $b=3$ и боковые стороны $c=d=7$.

Равнобедренная трапеция — хордиальный четырехугольник, так как противолежащие углы равнобедренной трапеции — пополнительные. Обозначив диагональ трапеции через x (рис. 367), имеем согласно теореме Птоломея:

$$x^2=5\cdot 3+7\cdot 7=64, \text{ откуда } x=8.$$

Решение этой задачи подчеркивает все преимущества применения теоремы Птоломея; иное решение этой задачи потребовало бы значительно большего числа выкладок.

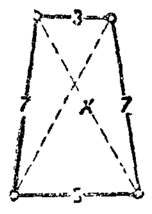


Рис. 367.

Задача 5. Построить хордиальный четырехугольник по четырем данным его сторонам a, b, c и d.

Построение четырехугольника возможно, если каждая из его сторон меньше суммы остальных сторон.

По теореме Птоломея имеем: $m\cdot n=a\cdot c+b\cdot d$, где m и n — диагонали. Для определения диагоналей m и n следует найти еще одну зависимость между m и n.

Пусть $ABCD$ — вписанный, хордиальный четырехугольник (рис. 368) и $AC=m$ и $BD=n$ — его диагонали. Отложив от точки D дугу $DC_1=\smile BC$, соединим точку C_1 с точками A, B и D. В четырехугольнике ABC_1D имеем $DC_1=b$, $C_1B=c$, так как $\smile BCC_1=\smile DC_1C$, $BA=a$, $DA=d$, $BD=n$ и $C_1A=x$, значит

$$nx=ab+cd. \qquad (1)$$

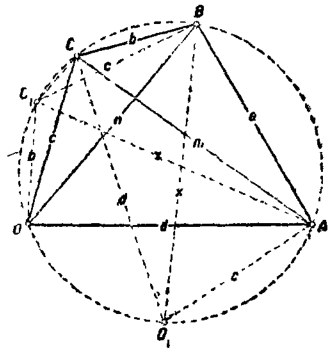


Рис. 368.

Отложив затем от точки A дугу $AD_1=CD$ и соединив точку D_1 с точками A, B и C, получим четырехугольник $ABCD_1$, в котором $CD_1=AD=d$, $AD_1=CD=c$, $AB=a$, $BC=b$, $AC=m$ и $BD_1=AC_1=x$; значит

$$mx=ad+bc. \qquad (2)$$

Деля почленно равенство (2) на (1), получим:

$$\frac{m}{n}=\frac{ad+bc}{ab+cd}.$$

Итак, **диагонали вписавного четырехугольника относятся как сумма произведений сторон, сходящихся в концах соответственных диагоналей.**

$$mn=ac+bd \quad \text{и} \quad \frac{m}{n}=\frac{ad+bc}{ab+cd}.$$

Перемножая и деля почленно левые и правые части последних равенств, находим:

$$m^2=\frac{(ac+bd)(bc+ad)}{ab+cd} \quad \text{и} \quad n^2=\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{bc+ad},$$

откуда

$$m=\sqrt{\frac{(ac+bd)(bc+ad)}{ab+cd}} \quad \text{и} \quad n=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{bc+ad}}.$$

Для построения, положим, диагонали m, причем

$$m=\frac{\sqrt{ac+bd}\cdot\sqrt{bc+\ d}}{\sqrt{ab+cd}},$$

примем

$$\sqrt{ac+bd}=x, \quad \sqrt{bc+ad}=y \quad \text{и} \quad \sqrt{ab+cd}=z,$$

и тогда

$$m=\frac{x\cdot y}{z}.$$

Умение строить отрезки x, y и z позволяет построить и отрезок m — четвертый пропорциональный отрезкам x, y и z, а затем построить треугольник ABC по трем сторонам a, b и m, и, наконец, треугольник ACD по сторонам c, d и m.

Формула $m=\sqrt{\frac{(ac+bd)(bc+ad)}{(ab+cd)}}$ указывает, что:

1) $ac+bd$ — сумма произведений противолежащих сторон четырехугольника;

2) $bc+ad$ — сумма произведений сторон, сходящихся в концах диагонали m;

3) $ab+cd$ — сумма произведений сторон, сходящихся в концах диагонали n.

Задачи, решаемые с помощью теоремы Птоломея, приведены в сборнике геометрических задач Рыбкина, ч. I, § 13.

14. Приведенное построение хордального четырехугольника по четырем его сторонам сложно и требует больших выкладок. Следует указать учащимся, что математики веками бесплодно искали более краткого решения, выполняемого геометрическим построением. Лишь примерно 30 лет назад было найдено весьма простое геометрическое решение.

Решение. Анализ: пусть $ABCD$ — хордиальный четырехугольник (рис. 369). Если продолжить сторону AB за точку B и повернуть треугольник BCD вокруг вершины B так, чтобы вершина C упала на продолжение стороны AB в точку C_1, то треугольник BCD примет положение BC_1D_1; $\angle BC_1D_1=\angle C=180^\circ-\angle A$, поэтому $D_1C_1 \parallel DA$, ибо

$\angle D_1C_1E = \angle A$, и прямая DD_1 пересекает продолжение стороны AB в точке E. Найти точку E прямой, на которой лежит вершина D четырехугольника, нетрудно; обозначив C_1E через x, находим:

$$\frac{a+b+x}{x} = \frac{d}{c} \quad \text{или} \quad \frac{a+b}{x} = \frac{d-c}{c},$$

откуда $x = \dfrac{(a+b)\,c}{d-c}$ есть четвертый пропорциональный отрезок отрезков $a+b$, c и $d-c$.

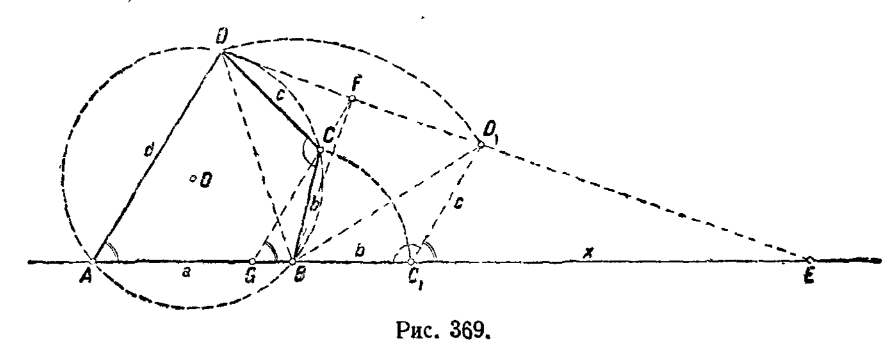


Рис. 369.

Так же просто находится построением другая точка прямой, на которой лежит вершина D, точка F. В самом деле, треугольник DBD_1 — равнобедренный, так как $DB = BD_1$, и потому 1) точка F — середина отрезка

Рис. 370.

DD_1 и 2) треугольник BFE — прямоугольный, а потому точка F лежит на окружности диаметра BE. Кроме того точка F должна лежать на прямой GF,

параллельной стороне AD и проходящей через середину отрезка AC_1 Следовательно, точка F принадлежит двум геометрическим местам — окружности диаметра BE и прямой GF; но $GF = \frac{c+d}{2}$ как средняя линия трапеции AC_1D_1D, значит точка F принадлежит окружности радиуса $\frac{c+d}{2}$ с центром в середине отрезка $AC_1 = a + b$.

Вершина D четырехугольника лежит на прямой EF и на прямой AD, параллельной GF; таким образом, три вершины, A, B и D, четырехугольника известны. Четвертая вершина C лежит: 1) на окружности, проведенной через точки A, B и D, ибо четырехугольник должен быть хордиальным, и 2) на окружности радиуса $BC_1 = b$ с центром в точке B.

Построение. Пусть a, b, c и d — стороны искомого хордиального четырехугольника (рис. 370).

На произвольной прямой MN следует выбрать произвольную точку A и отложить от этой точки в последовательном порядке отрезки $AB = a$ и $BC_1 = b$. Если затем построить при точке A на прямой MN произвольный угол NAK и на стороне его AK отложить отрезок $AK = d$ и от точки K в обратном направлении отрезок $KL = c$, то, проведя LC_1 и $KE \parallel LC_1$, получим точку E, при этом

$$\frac{AK}{LK} = \frac{AE}{C_1E} \quad \text{или} \quad \frac{2d}{2c} = \frac{d}{c} = \frac{a+b+x}{x}.$$

После этого строим окружность O_1 на диаметре BE и другую окружрость радиуса $\frac{c+d}{2}$ с центром в точке G, середине отрезка AC_1; точка F — точка их пересечения. Проводим прямую EF и затем $AD \parallel GF$; точка D пересечения EF с AD даст вершину D четырехугольника. Проводим затем окружность через точки A, B и D и, наконец, окружность с центром в точке B радиусом $BC_1 = b$; точка C пересечения окружности и будет четвертой вершиной четырехугольника и сторона CD — четвертая его сторона, равная c.

Доказательство. Четырехугольник $ABCD$ — хордиальный; a и b две его стороны; если провести $C_1C_2 \parallel AD$, то нетрудно усмотреть, что $C_1C_2 = c$; в самом деле,

$$\frac{AD}{C_1C_2} = \frac{a+b+x}{x} = \frac{d}{c},$$

откуда

$$\frac{AD + C_1C_2}{C_1C_2} = \frac{d+c}{c},$$

но $AD + C_1C_2 = 2GF = d + c$, и потому $C_1C_2 = c$, а следовательно $AD = d$; кроме того $BF \perp DC_2$ и $DF = FC_2$; значит $BD = BC_2$ и $\triangle BCD = \triangle BC_1C_2$ по двум сторонам и углу, лежащему против большей из них, а потому $C_1C_2 = CD = c$.

Исследование. Построение возможно, если каждая сторона четырехугольника меньше суммы трех остальных его сторон. Это же условие получается при проверке неравенств:

$$1) \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{bc+ad}} < b + c \quad \text{и} \quad 2) \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{bc+ad}} < a + d.$$

Считаем необходимым подчеркнуть, что число задач на построение не должно быть сведено до минимума, как это часто имеет место в средней школе; задачам на построение следует уделить достаточно времени, во всяком случае не меньше, чем задачам на вычисление. Если учащиеся действительно должны знать геометрию и владеть ее методами, то не может быть речи о сокращении числа часов, отводимых на задачи на построение.

Мы умышленно приводим различные способы решения одного и того же вопроса, чтобы более четко подчеркнуть преимущества одного способа решения перед другим. Это, однако, отнюдь не значит, что при решении какой-либо задачи были рассмотрены с учащимися с исчерпывающей полнотой всевозможные ее решения, тем не менее желательно несколько вопросов разобрать с учащимися во всех их подробностях; этого настойчиво требует изучаемый ими предмет — геометрия.

Необходимо также приучить учащихся при решении задач на построение расчленять решение на четыре части: анализ, построение, доказательство и исследование; это заставляет учащихся критически относиться к полученным выводам.

§ 18. Площади прямолинейных фигур и связанные с ними задачи.

Предварительные замечания.

1. К числу трудных для учащихся понятий принадлежит понятие о площади как о величине. Чтобы подвести учащихся к уяснению этого понятия, следует показать им сопоставлением ряда геометрических фактов и примеров, взятых из практической жизни, что площадь есть величина и может быть выражена числом.

Точка A, взятая на прямой MN (рис. 371), делит прямую на две части, на два луча AM и AN *противоположного направления*, и каждый из них может быть продолжен по направлению от A как угодно далеко.

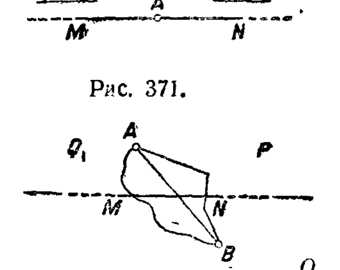


Рис. 371.

Рис. 372.

Точно так же и прямая MN, лежащая в плоскости P (рис. 372), делит плоскость на две части, Q_1 и Q_2, на две о б л а с т и, каждая из которых может быть продолжена по одну „сторону" прямой MN как угодно далеко. При этом всякая точка A плоскости P, не лежащая на прямой MN, отделяющей область Q_1 от области Q_2, принадлежит только одной области. Отрезок прямой (или часть кривой или ломаной), соединяющий точку A области Q_1 с точкой B области Q_2, имеет общую точку с прямой MN, т. е. пересекает прямую MN. Переход по плоскости из точки A в точку B не может быть выполнен иначе, как только путем пересечения в какой-нибудь точке прямой MN.

Любая замкнутая линия на плоскости — контур треугольника, квадрата, прямоугольника, окружности и т. д. — делит плоскость на две области, общей границей которых является сама замкнутая линия; так, окружность C делит плоскость, в которой она лежит, на две области

(рис. 373), Q_1 и Q_2, из которых Q_2 — внешняя область, Q_1 — внутренняя область, которая на рисунке заштрихована; границей обеих областей служит окружность.

Главное различие между областями „внутренней“ и „внешней“ заключается в следующем: во внешней области можно провести бесчисленное множество прямых; во внутренней, ограниченной области можно провести только отрезки.

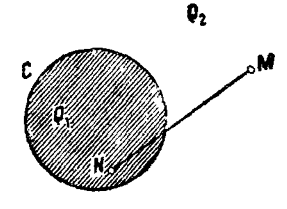


Рис. 373.

Любая точка M или N, не лежащая на границе C обеих областей, принадлежит одной из этих областей и только ей одной. Переход из точки M внешней области Q_2 в точку N внутренней области Q_1 по прямой, кривой или ломаной линии на плоскости возможен не иначе, как при условии, что эта прямая, кривая или ломаная пересечет границу C обеих плоскостей, т. е. контур, отделяющий одну область от другой.

2. Вопросы практической жизни, обмер земельных участков, окраска стен и т. п., поставили человека перед необходимостью рассматривать ограниченную область плоскости как величину. На самом деле, когда человеку потребовалось обработать два земельных участка или окрасить две стены, то, с одной стороны, число рабочих единиц, необходимых для обработки участков, число орудий производства, количество нужного для посева зерна, с другой — количество краски, необходимой для окраски стен, а следовательно — размер расходов, связанных с выполнением этих работ, обусловливался тем, равны или не равны участки земли или стены, подлежащие окраске; таким образом, решение этого вопроса привело его к понятию о величине ограниченной области.

На основе практики в науке принято считать:

1) что фигуры конгруэнтные имеют равные внутренние области;

2) что две фигуры, из которых контур первой целиком лежит во внутренней области второй, не имеют равных внутренних областей; первая есть часть второй и имеет меньшую внутреннюю область, чем вторая, а вторая есть целое относительно второй и имеет большую внутреннюю область, чем первая; так, на рисунке 374 внутренняя область фигуры A больше внутренней области фигуры B и наоборот; значит,

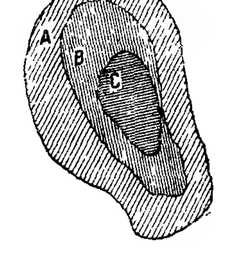


Рис. 374.

$$A > B \quad \text{и} \quad B < A;$$

3) что суммы (или разности) фигур с равными внутренними областями имеют равные внутренние области (рис. 375);

4) что две фигуры, имеющие равные внутренние области с внутренней областью третьей фигуры, имеют равные между собою внутренние области (рис. 376);

5) что если даны две фигуры, то первая должна либо иметь равную, либо неравную внутреннюю область со второй;

6) что если первая фигура имеет внутреннюю область меньше вто-

рой, а вторая фигура имеет внутреннюю область меньше третьей, то и первая фигура имеет внутреннюю область меньше третьей.

Так, на рисунке 374 фигура $A > B$ и $B > C$, следовательно $A > C$ и $A > B > C$.

Все эти положения являются аксиомами и не доказываются. Подробнее об этом изложено в книгах: 1) Гильберт, Основания геометрии, 2) Вебер и Вельштейн, Энциклопедия элементарной математики и 3) Энриквес, Вопросы элементарной геометрии, статья Амальди.

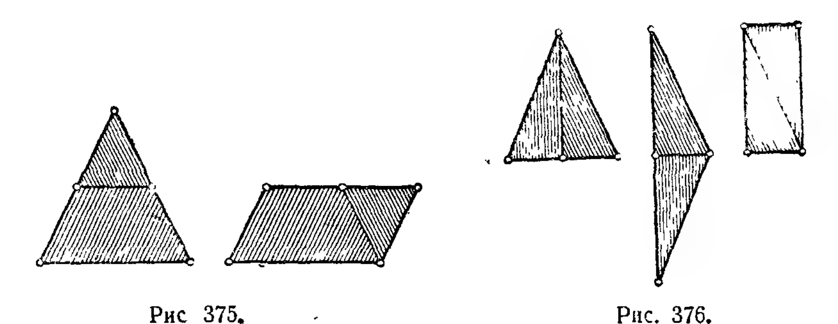


Рис 375. Рис. 376.

Таким образом, внутренняя область фигуры есть понятие категории величины.

Величина внутренней области фигуры называется ее площадью. В дальнейшем необходимо найти меру площади.

Равносоставленные фигуры.

3. *Две фигуры называются равносоставленными, если они могут быть составлены из конечного числа попарно конгруэнтных между собою фигур;* понятно, что внутренние области равносоставленных фигур равны.

Две фигуры называются равновеликими, если они имеют равные внутренние области.

Сопоставляя определения равносоставленных и равновеликих фигур, получаем, что всякая пара равносоставленных фигур есть и пара равновеликих фигур. Встает вопрос: будет ли верно и утверждение обратное? Оказывается, что для плоских прямолинейных фигур ответ дается утвердительный. Доказательство этого можно найти у Е. Фурре в его книге „Геометрические головоломки и паралогизмы“ и у В. Ф. Кагана в его книге „О преобразованиях многогранников“.

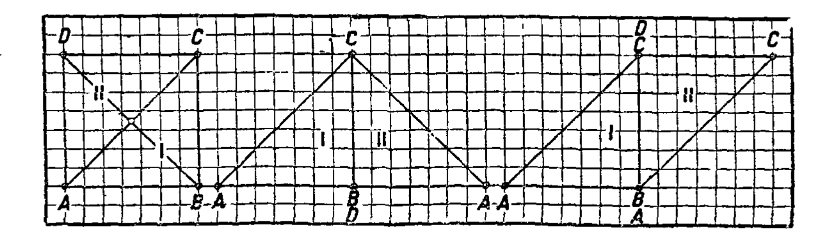


Рис. 377.

1) Дан квадрат $ABCD$ (рис. 377); если провести в нем диагональ AC (или диагональ BD), то она разделит квадрат на два равных равнобедренных прямоугольных треугольника. Приложив один из треугольников к другому так, чтобы катет одного треугольника совпал с катетом другого, получим новые фигуры: или треугольник или параллелограм. Понятно, что каждая из этих фигур: квадрат, треугольник и параллелограм — составлена из двух равных треугольников; эти фигуры не конгруэнтны, равны только их внутренние области; фигуры равносоставлены, а следовательно и равновелики.

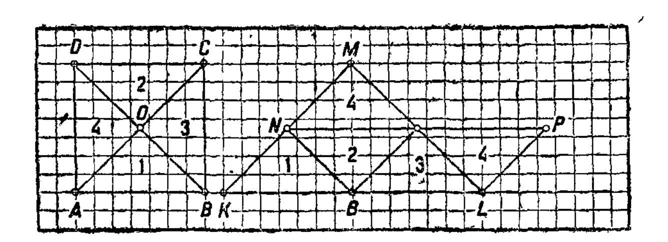


Рис. 378.

2) Квадрат $ABCD$ (рис. 378) двумя диагоналями разделен на четыре равных прямоугольных равнобедренных треугольника; из этих треугольников составлены, как показано на рисунке 378, треугольник KLM и параллелограм $KLPN$.

Все три фигуры составлены из одинакового числа равных треугольников, внутренние области которых равны, следовательно равны и внутренние области всех трех фигур: квадрата, треугольника и параллелограма, т. е. фигуры равносоставлены и равновелики.

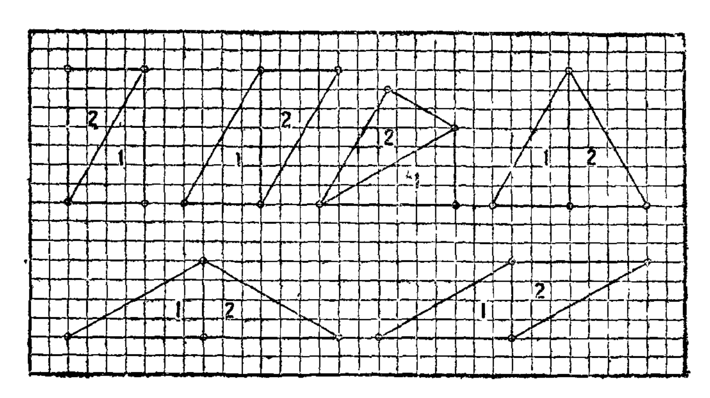


Рис. 379.

3) Прямоугольник разбит диагональю на два равных прямоугольных треугольника (рис. 379). Из них составлены „приложением“ их друг к другу 2 параллелограма, четырехугольник (дельтоид) и 2 треугольника. Все эти 6 фигур — фигуры равносоставленные и равновеликие, так как состоят из двух соответственно равных треугольников.

Уже на основании этих примеров учащиеся, убедившись в справедливости сделанных заключений, придут к выводу, что если фигуры равносоставлены, то это еще не значит, что они равны.

4) Если в параллелограме $ABCD$ (рис. 380) провести из его вершины D высоту DE, то последняя отсечет от него прямоугольный

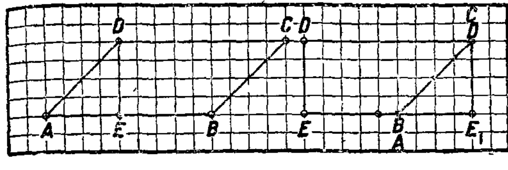


Рис. 380.

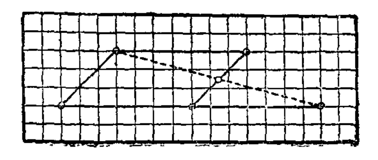


Рис. 381.

треугольник DEA; другая часть параллелограма, четырехугольник $DEBC$,— прямоугольная трапеция. Треугольник DEA, приложенный к трапеции $DEBC$ так, чтобы AD совпала с BC, как показано на рисунке, дает вместе с трапецией прямоугольник DEE_1C, равносоставленный с параллелограмом. В самом деле, обе фигуры — параллелограм $ABCD$ и прямоугольник DEE_1C — состоят из соответственно равных фигур: трапеции $DCBE$ и треугольника ADE.

5) На рисунке 381 показано превращение параллелограма в равносоставленный треугольник.

6) На рисунке 382 прямоугольник $ABCD$ разделен на 3 равных прямоугольника, а затем каждый из них — на два равных треугольчика, и из них составлен затем параллелограм ABC_1D_1. Параллелограм ABC_1D_1 и прямоугольник $ABCD$ равносоставлены, а потому равновелики.

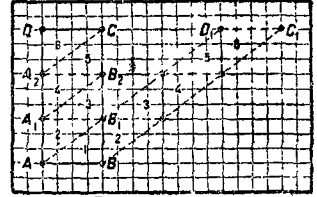


Рис. 382.

7) На рисунке 383 дана трапеция, превращенная в равносоставленные параллелограм, треугольник и прямоугольник.

8) Дан параллелограм $ABCD$ (рис. 384). Его диагональ разбивает параллелограм на 2 равных треугольника ABC и ACD. Проведем через произвольную точку M диагонали AC прямые, параллельные сторонам параллелограма; тогда в параллелограме AB_1MA_1 треугольник AB_1M равен треугольнику AMA_1, а в параллелограме MC_1CD_1 треугольник MC_1C равен треугольнику MCD_1 и эти треугольники равновелики. Итак,

$$\triangle ABC = \triangle ACD, \qquad (1)$$

$$\triangle AB_1M = \triangle AMA_1, \qquad (2)$$

$$\triangle MC_1C = \triangle MCD_1. \qquad (3)$$

Складывая почленно последние два равенства (2) и (3) и вычитая полученное равенство почленно из равенства (1), получим: внутр. обл. ABC — (внутр. обл. AB_1M + внутр. обл. MC_1C) = внутр. обл. ACD — (внутр. обл. AMA_1 + внутр. обл. MCD_1) или внутр. обл. A_1MD_1D = внутр. обл. B_1BC_1M.

Итак, внутренние области параллелограмов, через которые не проходит диагональ AC, равны, т. е. они равновелики.

Здесь мы имеем случай, когда известно, что фигуры равновелики, но неизвестно, будут ли они равносоставленными. Покажем, что они и равносоставлены, и тем самым убедимся на этом частном случае в справедливости вышеуказанной теоремы. На рисунке 384а показано, как могут быть разбиты параллелограмы B_1BC_1M и A_1MD_1D на одинаковое число соответственно равных фигур, в данном случае — семь соответственно равных фигур, а именно — пять пар треугольников (*1, 2, 3, 4* и *7*) и две пары трапеций (*5* и *6*).

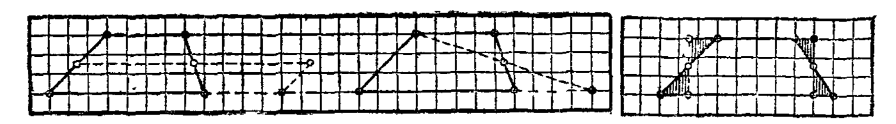


Рис. 383.

Параллелограмы $ABCD$ и MC_1CD_1 подобны, и для упрощения рисунка коэфициент пропорциональности принят равным $3\frac{1}{2}$.

В каждом из данных параллелограмов построены по два параллелограма, равные MC_1CD_1, и их диагонали; треугольники *1, 2, 3* равны как половины равных параллелограмов. В четвертых треугольниках проведены средние линии, в одном — параллельно большей стороне, в другом — параллельно меньшей стороне параллелограма. В оставшихся параллелограмах проведены отрезки, соединяющие вершину острого угла со срединой большей стороны параллелограма. 4-ые треугольники равны (СУС), 7-ые также равны (УСУ), равны также попарно трапеции 5-ые и 6-ые.

Когда, таким образом, учащиеся подведены к понятию 1) о внутренней области фигуры, 2) о равносоставленных фигурах и 3) о равновеликих фигурах, — следует перейти к понятию площади фигуры.

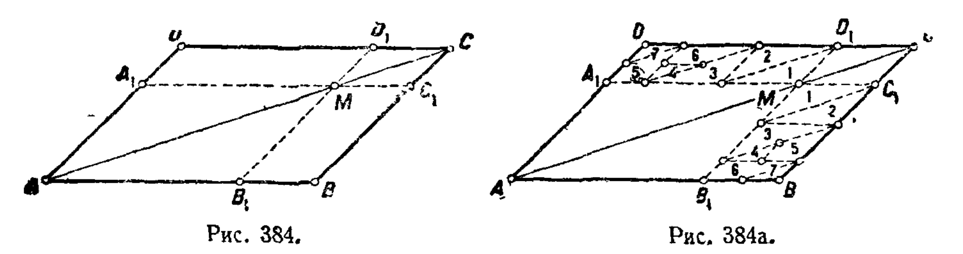


Рис. 384.

Рис. 384а.

Заметим, что в иностранной учебной литературе равные фигуры обычно называются **конгруэнтными**, равновеликие же фигуры называются „равными“; таким образом, предложение „равные фигуры равновелики“ читается, согласно указанной терминологии, так: „конгруэнтные фигуры равны“. Мы полагаем, что следовало бы придерживаться указанной терминологии, но, поскольку она еще не вошла в нашу учебную литературу, мы будем пользоваться терминами „равный“ и „конгруэнтный“ параллельно, для обозначения же фигур, имеющих равные площади, будем пользоваться термином „равновеликие“.

Площадь прямоугольника и квадрата.

4. После того как учащимся дано понятие о площади фигуры как о величине ее внутренней области и вскрыто понятие о равносоставленных и равновеликих фигурах, следует перейти к мере площади и к вычислению площадей, обращая при этом еще раз внимание учащихся на то, что не всякие равносоставленные фигуры равны или конгруэнтны. Рассмотрение вопроса о площадях прямолинейных фигур следует начать с меры площадей. Под мерою площади фигуры подразумевают число, которое показывает, во сколько раз площадь данной фигуры больше площади другой фигуры, принятой за единицу. Когда устанавливают, что площадь может быть измерена другой площадью, принятой за единицу, принимают обыкновенно за единицу измерения площадей площадь квадрата, сторона которого имеет размер линейный, принятый за единицу.

Чтобы найти отношение площади прямолинейной фигуры к площади квадрата, принятой за единицу, нужно переходить от фигур простейших к сложным. Самой простой фигурой для измерения ее площади квадратной единицей является прямоугольник.

К измерению площадей прямолинейных фигур имеются два подхода; они имеют свои достоинства и свои недостатки.

Подход первый.

Теорема 1. **Если два прямоугольника имеют по равной стороне, то их площади относятся, как их другие стороны.**

Дано: прямоугольники $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$; $a_1 = a_2$.
Треб. док.: $S_{A_1B_1C_1D_1} : S_{A_2B_2C_2D_2} = b_1 : b_2$.

Рассмотрим два случая.

1-й случай: стороны b_1 и b_2 соизмеримы и, следовательно, имеют общую меру (рис. 385); пусть это будет отрезок c, который содержится в отрезке b_1 m раз, в отрезке b_2 n раз. В таком случае $\frac{b_1}{b_2} = \frac{m}{n}$.

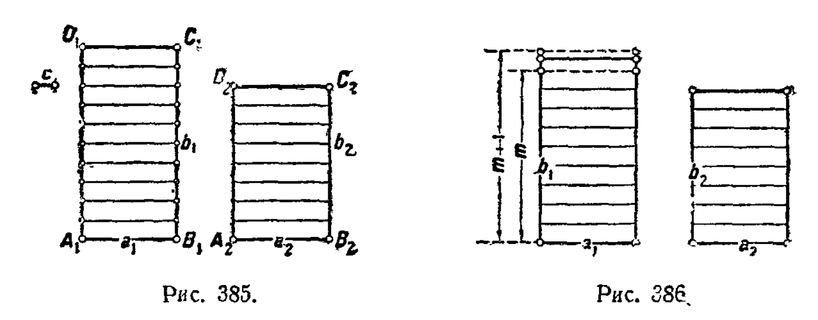


Рис. 385. Рис. 386.

Если затем провести через точки деления сторон каждого из прямоугольников прямые, параллельные сторонам a_1 и a_2, то каждый из прямоугольников разобьется соответственно на m и n равных, а, следовательно, и равновеликих прямоугольников, а потому

$$S_{A_1B_1C_1D_1} : S_{A_2B_2C_2D_2} = m : n.$$

Но $b_1 : b_2 = m : n$, а потому и $S_{A_1B_1C_1D_1} : S_{A_2B_2C_2D_2} = b_1 : b_2$.

2-й случай: стороны b_1 и b_2 несоизмеримы (рис. 386). Разделим одну из сторон двух прямоугольников, положим b_2, на n равных частей и отложим $\frac{1}{n}$ стороны b_2 на стороне b_1; пусть $\frac{1}{n}$ стороны b_2 содержится в стороне b_1 m раз с недостатком и $m+1$ раз с избытком, тогда

$$\frac{b_1}{b_2} \approx \frac{m}{n} \text{ с недостатком}$$

или

$$\frac{b_1}{b_2} \approx \frac{m+1}{n} \text{ с избытком.}$$

Если провести через точки деления сторон обоих прямоугольников прямые, параллельные сторонам a_1 и a_2 прямоугольников, то в одном прямоугольнике получатся n равных, а, следовательно, и равновеликих прямоугольников, в другом же — m таких же прямоугольников и один остаточный, площадь которого меньше каждого из полученных малых прямоугольников, а потому

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{A_2B_2C_2D_2}} \approx \frac{m}{n} \text{ с недостатком}$$

или

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{A_2B_2C_2D_2}} \approx \frac{m+1}{n} \text{ с избытком.}$$

Отсюда следует, что $\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{A_2B_2C_2D_2}} = \frac{b_1}{b_2}$, так как оба отношения — и площадей и сторон прямоугольников, вычисленные с одинаковой степенью точности, с недостатком или с избытком, равны. Итак теорема доказана.

Теорема 2. **Отношение площадей двух прямоугольников равно отношению произведений смежных сторон в каждом из них.**

Дано: $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ — прямоугольники; a_1 и b_1, a_2 и b_2 — их стороны.

Треб. док.: $\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{A_2B_2C_2D_2}} = \frac{a_1b_1}{a_2b_2}$.

Построим вспомогательный прямоугольник $A_3B_3C_3D_3$ так, чтобы одна из его сторон $A_3B_3 = a_1$, а другая $A_3D_3 = b_2$ (рис. 387). Тогда на основании доказанных выше теорем имеем:

1) для прямоугольников $A_1B_1C_1D_1$ и $A_3B_3C_3D_3$

$$\frac{S_1}{S_3} = \frac{b_1}{b_2}; \qquad (1)$$

Рис. 387.

2) для прямоугольников $A_2B_2C_2D_2$ и $A_3B_3C_3D_3$

$$\frac{S_2}{S_3} = \frac{a_2}{a_1}. \qquad (2)$$

Если разделить почленно равенство (1) на равенство (2) то получим:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1b_1}{a_2b_2}.$$

При условии, что $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$, имеем:

$$S_1 : S_2 = 1.$$

Последнее отношение указывает, что при заданном условии прямоугольники равны.

Теорема 3. **Площадь прямоугольника равна произведению двух его смежных сторон или произведению его основания и высоты.**

Доказательство основано на сравнении прямоугольника и квадрата. Обозначив площадь прямоугольника через $S_{▭}$ и стороны его через a и b, площадь квадрата через $S_{□}$ и стороны его через m и приняв $m = 1$, имеем на основании теоремы 2:

$$\frac{S_{▭}}{S_{□}} = \frac{ab}{mm}, \quad \text{или} \quad \frac{S_{▭}}{S_{□}} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1}.$$

Принимая $S_{□}$ за единицу, получаем:

$$\frac{S_{▭}}{1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1}.$$

Итак, **площадь прямоугольника, выраженная в квадратных единицах какого-либо наименования, равна произведению его смежных сторон, выраженных в линейных единицах того же наименования.**

Более краткая формулировка:

площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон:

$$S_{▭} = a \cdot b \text{ кв. ед.}$$

Закрепление данной формулы следует провести на ряде числовых примеров: 1) a и b — целые числа, 2) a — целое и b — дробное, 3) a и b — дробные числа и, наконец, 4) a и b — иррациональные числа. Необходимо подчеркнуть учащимся, что измерение площади прямоугольника выполняется косвенным путем.

Применив полученный выше вывод к квадрату со стороной a, получим формулу площади квадрата:

$$S_{□} = a \cdot a = a^2 \text{ кв. ед.}$$

Итак, **площадь квадрата равна квадрату его стороны.**

Если раздел о площадях прорабатывается до рассмотрения вопроса о соизмеримости отрезков, то раздел о площадях следует пройти в следующем порядке.

5. Подход второй. Сперва следует рассмотреть площадь прямоугольника, стороны которого выражены в целых числах. В данном случае прямоугольник разбивается прямыми, параллельными сторонам прямоугольника, на квадраты; подсчет числа квадратов, площадь каждого из которых принята за единицу, дает число квадратных единиц, содержащихся в площади прямоугольника.

Отсюда вывод: **число, измеряющее площадь прямоугольника в квадратных единицах какого-нибудь наименования, равно произведению чисел, измеряющих две смежные стороны прямоугольника в линейных единицах того же наименования.**

Следует подчеркнуть, что при вычислении площади прямоугольника необходимо прежде всего выразить его измерения в мерах одного и того же наименования.

Затем следует вычислить площадь квадрата, сторона которого равна единице или долям единицы. Так, если каждую из сторон квадрата разделить на n равных частей, то площадь всего квадрата будет состоять из n^2 равных и равновеликих квадратов, и каждый такой малый квадрат составляет $\frac{1}{n^2}$ часть всего квадрата. Справедливость сказанного проверяется на числовом примере. Если разделить сторону квадрата на 8 равных частей и разбить квадрат параллелями на малые квадраты, то площадь каждого из малых квадратов составляет $\frac{1}{8^2}=\frac{1}{64}$ площади всего квадрата; таким образом, в площади квадрата, принятого за единицу меры площади, малый квадрат содержится 8^2 или n^2 раз.

Вслед за этим следует остановиться на случае, когда обе стороны прямоугольника выражены дробными числами. Последние приводятся к общему знаменателю; и пусть одна из сторон равна $\frac{m}{q}$, другая же $\frac{n}{q}$ единицам; разделив сторону $\frac{m}{q}$ на m равных частей и сторону $\frac{n}{q}$ на n равных частей, можно разделить всю площадь прямоугольника параллелями на $m \cdot n$ малых квадратов, площадь каждого из которых в q^2 раз меньше площади данного квадрата, принятого за единицу для измерения площади.

Итак, $S_{\square} = m \cdot n$ малым кв. единицам,

или $S_{\square} = \frac{m \cdot n}{q^2}$ заданным кв. ед. $= \frac{m}{q} \cdot \frac{n}{q}$ кв. ед.

Когда одна из сторон прямоугольника — целое число, а другая выражена дробным числом, то имеем дело с частным случаем только что рассмотренной теоремы.

Таким образом, площадь прямоугольника в обоих случаях равна произведению двух смежных его сторон.

Наконец, рассмотрим прямоугольник, стороны которого — числа иррациональные и, следовательно, не могут быть выражены точно ни целым числом, ни конечною дробью. Пусть стороны данного прямоугольника $ABCD$ (рис. 388) выражены иррациональными числами $AB=a$ и $BC=b$ и пусть они измерены с точностью до $\frac{1}{n}$, где n — любое целое число. Положим, что линейная единица разделена на n равных частей и она содержится в AB a_1 раз с недостатком и $\left(a_1+\frac{1}{n}\right)$ раз с избытком, а в BC содержится b_1 раз с недостатком и $\left(b_1+\frac{1}{n}\right)$ раз с избытком. Построим прямоугольники $AB_1C_1D_1$ со сторонами a_1 и b_1 и $AB_2C_2D_2$ со сторонами $a_1+\frac{1}{n}$ и $b_1+\frac{1}{n}$. Площади их соответственно будут $a_1 \cdot b_1$ и $\left(a_1+\frac{1}{n}\right)\left(b_1+\frac{1}{n}\right)$, ибо числа эти — рациональные. Площадь прямоугольника $ABCD$ заключается между ними и больше площади $AB_1C_1D_1$, но меньше площади $AB_2C_2D_2$; разность же площадей $AB_2C_2D_2$ и $AB_1C_1D_1$ равна

$$\left(a_1+\frac{1}{n}\right)\left(b_1+\frac{1}{n}\right)-a_1 b_1=\frac{a_1+b_1}{n}+\frac{1}{n^2}.$$

Рис. 388.

Площадь $ABCD$ отличается от площади каждого из прямоугольников $AB_2C_2D_2$ и $AB_1C_1D_1$ меньше чем на $\frac{a_1+b_1}{n}+\frac{1}{n^2}$. Эту последнюю разность можно сделать меньше какого угодно наперед заданного числа, так как n можно выбрать каким угодно большим, и тогда сумма дробей $\frac{a_1+b_1}{n}+\frac{1}{n^2}$ становится меньше какого угодно малого числа и является пределом ошибки. Точное значение площади $ABCD$ всегда должно заключаться между $a_1 b_1$ и $\left(a_1+\frac{1}{n}\right)\left(b_1+\frac{1}{n}\right)$; таким числом, как известно из теории иррациональных чисел, будет $a \cdot b$, ибо и a_1 и $a_1+\frac{1}{n}$ при неограниченном увеличении числа n имеют своим пределом a, а b_1 и $b_1+\frac{1}{n}$ имеют своим пределом b. Следовательно, и тогда, когда a и b числа иррациональные, остается верной теорема, что площадь прямоугольника равна произведению двух его смежных сторон.

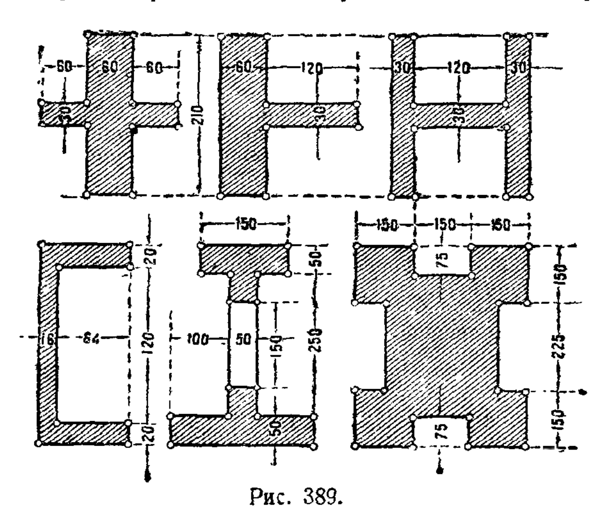


Рис. 389.

Если класс не силен, можно ограничиться указанием, что площадь прямоугольника, стороны которого a и b выражены иррациональными числами, вычисляется по формуле $S_{\square}=a\cdot b$ кв. ед.

1) Найти площади поперечных сечений, изображенных на рисунке 389. Размеры даны в миллиметрах.

Отв.: 1), 2), 3) 162 $см^2$; 4) 51,2 $см^2$; 5) 250 $см^2$; 6) 1800 $см^2$.

2) Стороны трех прямоугольников, в том числе и квадрата, равны по порядку 12, 10 и 8 *см*; 8 *см* — сторона квадрата. Периметры их равны. Найти площадь каждой фигуры.

Сторона квадрата равна 8 *см*, следовательно периметр его 32 *см*. Периметр каждого прямоугольника также равен 32 *см*; поэтому вторая сторона первого прямоугольника равна $\frac{32-2\cdot 12}{2}=4$ *см*, вторая сторона второго прямоугольника равна $\frac{32-2\cdot 10}{2}=6$ *см*.

Площадь первого прямоугольника равна $12 \cdot 4 = 48$ *см*²,
" второго " " $10 \cdot 6 = 60$ *см*²,
" квадрата " " $8 \cdot 8 = 64$ *см*².

Итак, наибольшая площадь у квадрата.

Указывается, что фигуры с одинаковыми периметрами называются *изопериметрическими.* Полученный вывод формулируется так: **из всех изопериметрических прямоугольников наибольшая площадь у квадрата.**

Если принять во внимание, что полупериметр каждого из прямоугольников или сумма двух смежных сторон равна 16 *см*, то этот вопрос весьма наглядно можеть быть разрешен с помощью числовых линеек, о которых речь была выше. Приложив к одной из линеек (рис. 390) другую, перевернутую так, чтобы числа одной из них давали с другой сумму 16, нетрудно заметить, что наибольшее из произведений получается тогда, когда оба слагаемых равны.

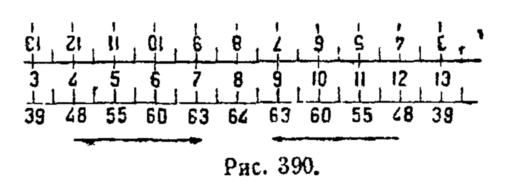


Рис. 390.

3) Стороны двух прямоугольников и квадрата соответственно равны 16 *м*, 10 *м* и 8 *м*. Площади их равны. Найти их периметры.

Площадь квадрата равна 64 *м*²; но фигуры равновелики, значит площадь каждого прямоугольника равна 64 *м*², а потому их вторые стороны соответственно равны $\frac{64}{16} = 4$ *м*, $\frac{64}{10} = 6,4$ *м*, их же периметры соответственно равны: $16 + 16 + 4 + 4 = 40$ *м* и $10 + 10 + 6,4 + 6,4 = 32,8$ *м*, а периметр квадрата равен $8 \cdot 4 = 32$ *м*. Итак,

из всех равновеликих прямоугольников наименьший периметр у квадрата.

Площади прямолинейных фигур.

6. Площади остальных прямолинейных фигур вычисляются обычным порядком, указанным в любом учебнике. Все фигуры приводятся к равносоставленным фигурам, площади которых могут быть вычислены: параллелограм — к прямоугольнику, треугольник — к половине параллелограма, трапеция — к треугольнику или параллелограму или же к прямоугольнику.

Необходимо обратить внимание учащихся и на то, что площадь ромба равна не только произведению его основания на высоту, но и половине произведения его диагоналей. На основании последней формулы решается вопрос об удвоении площади квадрата: квадрат, стороною которого служит диагональ данного квадрата, имеет площадь, вдвое большую, нежели площадь данного квадрата.

Надо также указать, что площадь трапеции равна произведению среднего арифметического ее оснований на высоту; следует показать учащимся, что площадь треугольника может быть получена как частный случай площади трапеции, а потому и площадь треугольника равна произведению средней его линии m на соответствующую высоту: $S_{\triangle} = m \cdot h$. Отсюда следует, что треугольник равновелик прямоугольнику, стороны которого m и h, что должно быть использовано при решении задач на построеиие.

Если раздел о площадях проходить до изучения раздела о подобии, то не следует увлекаться задачами на вычисление площадей, так как решение таких задач на данной ступени, когда учащиеся еще не знакомы с метрической зависимостью между элементами треугольника, сводится почти исключительно к подстановке числовых данных в соответствующие формулы.

В этом случае задачи на вычисление площадей следует отнести к более позднему времени, когда учащиеся познакомятся с подобием фигур и метрической зависимостью между их элементами.

Следует уделять внимание по преимуществу задачам на построение и превращение фигур, задачи же на вычисление должны носить лишь иллюстративный характер, причем необходимо решить и несколько таких задач, в которых по данной площади фигуры и одному линейному элементу вычисляется другой линейный элемент.

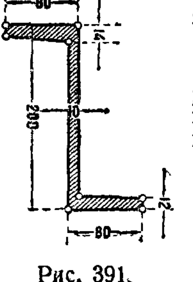


Рис. 391.

Рис. 392.

Примеры. 1) Вычислить площадь разреза зетового железа, изображенного на рисунке 391. Размеры даны в миллиметрах.

Площадь разреза представляет собою площади двух равных трапеций и прямоугольника. Отв.: 38,2 $см^2$.

2) Вычислить площадь сечения стены, данного на рисунке 392. Размеры даны в метрах. Отв: ≈ 7 $м^2$.

3) Вычислить площадь участка, план которого дан на рисунке 393. Размеры даны в метрах. Отв.: 1030 $м^2$.

4) Треугольники с равными средними линиями и равными высотами равновелики (рис. 394). Доказать.

5) Превратить многоугольник в равновеликий треугольник.

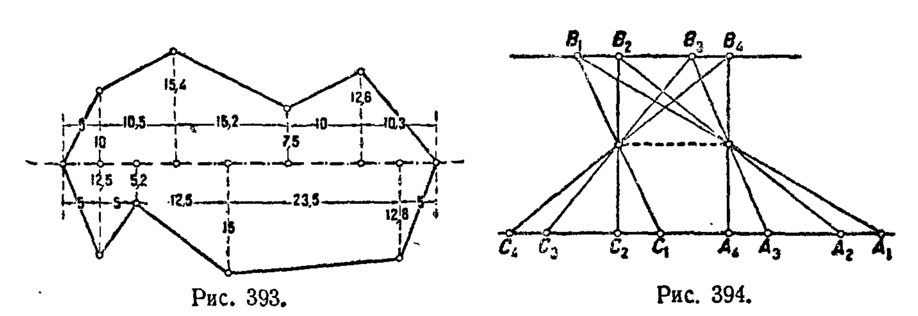


Рис. 393. Рис. 394.

6) Данный треугольник разделить на n равновеликих частей прямыми, проходящими через его вершину.

7) Данный параллелограм разделить на n равновеликих частей прямыми, исходящими из одной его вершины.

8) Через произвольную точку на стороне треугольника провести прямую, делящую треугольник на две равновеликие части.

Решение последних четырех задач дано в стабильном учебнике. Последнюю из них следует отнести к работе в кружке, так как она вследствие своей сложности отнимает много времени.

9) Не лишне обратить внимание учащихся на вопросы, заставляющие их критически отнестись к получаемым при решении этих вопросов выводам. Так, можно предложить „доказать", что $64 = 65$. Приводится следующее „доказательство".

Строится квадрат со стороною, равной 8 единицам; площадь такого квадрата равна 64 кв ед; разрезав затем квадрат по прямым, как указано на рисунке 395, составляют из полученных фигур прямоугольник. Однако площадь прямоугольника, состоящего из тех же частей, что и квадрат, оказывается по рисунку равной $13 \cdot 5 = 65$ кв. ед.; отсюда заключают, что $64 = 65$. Спрашивается, как это могло получиться, где кроется ошибка?

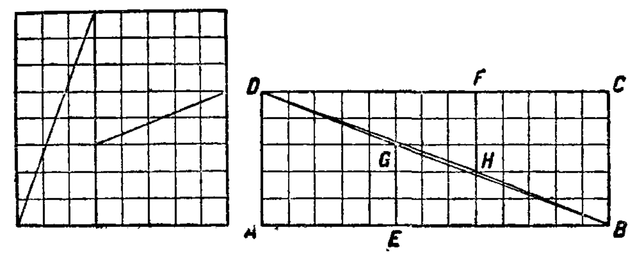


Рис. 395.

Разъясняется: ошибка заключается в том, что без должного основания принимается, что $DGHB$ — прямая линия; так оно кажется учащимся, полагающим, что вполне можно довериться глазу. Допустим, что $DGHB$ — прямая линия; в таком случае лучи x и DB, пересекаемые параллельными FH и CB, дадут:

$$\frac{CD}{DF} = \frac{BC}{FH} \text{ или } \frac{13}{8} = \frac{5}{3}$$

Пропорция явно неверна; имеем: $13 \cdot 3 = 8 \cdot 5$ или $39 = 40$, что явно нелепо. Но 5, 8 и 13 — отрезки определенной данной длины, а потому FH не равно трем, а несколько больше трех, и $DGHB$—не прямая; линия $ODHB$ пройдет через точку H, но она ломаная, а это указывает на то, что полученные фигуры не прилегают вплотную друг к другу; недоучет этого обстоятельства привел к тому, что площадь прямоугольника оказалась больше площади квадрата.

Подобного рода вопросы оживляют работу, заставляют учащихся внимательнее относиться к полученным выводам, не делать их поспешно, взвешивать каждый шаг. Собрание подобного рода вопросов можно найти в небольшой книге Литцмана и Трир „Где ошибка?", изданной и на русском языке. Ряд интересных вопросов имеется и в книгах Игнатьева „В царстве смекалки".

Теорема Пифагора.

7. К теореме Пифагора следует подвести учащихся путем доказательства, основанного на известных учащимся свойствах равносоставленных фигур. Построив два равных квадрата, сторона каждого из которых равна сумме катетов данного произвольного прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$), соединяют затем точки деления так, как показано на рисунке 396.

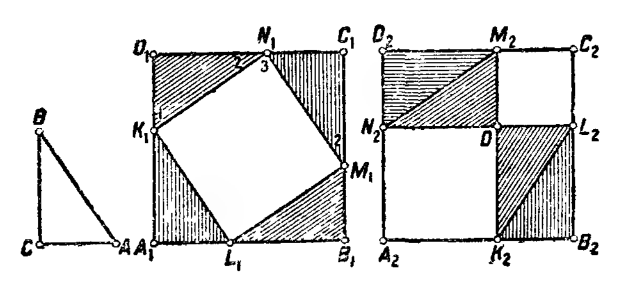


Рис. 396.

Оба квадрата $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ равны, значит они и равновелики; четыре заштрихованных треугольника одного квадрата и четыре треугольника другого равны между собою и равны данному треугольнику; следовательно, отнимая от двух равновеликих квадратов по четыре равновеликих треугольника, заключаем, что четырехугольник $K_1L_1M_1N_1$ равновелик двум четырехугольникам, $A_2K_2ON_2$ и $OL_2C_2M_2$.

Четырехугольники $A_2K_2ON_2$ и $OL_2C_2M_2$ — квадраты; квадратом также будет четырехугольник $K_1L_1M_1N_1$, ибо стороны его равны и углы прямые; действительно: $\triangle M_1C_1N_1 = \triangle N_1D_1K_1$, а потому углы их равны и $\angle 1 + \angle 2 = d$; $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 2d$, а потому $\angle 3 = d$.

Но $K_1L_1M_1N_1$ — квадрат, построенный на гипотенузе, а $A_2K_2ON_2$ и $OL_2C_2M_2$ — квадраты, построенные на катетах одного и того же треугольника. Теорема доказана. Итак,

площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах того же треугольника; короче:

квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Следует познакомить учащихся и с классическим доказательством теоремы, данным Евклидом и приведенным в стабильном учебнике.

Задачи, основанные на знакомстве с площадями прямолинейных фигур.

8. Знание формул площадей прямолинейных фигур и отношений площадей подобных фигур позволяет решить ряд задач на вычисление и на построение. Возвращаясь к построению формул 1) $h_c^2 = a_c b_c$, 2) $a^2 = ca_c$ и 3) $b^2 = cb_c$, следует прежде всего обратить внимание учащихся на размерность каждой из них: обе части этих формул второго измерения; левые части можно принять за числа, выражающие площади квадратов со сторонами h_c или a или b, правые же части — за числа, выражающие площади прямоугольников со сторонами a_c и b_c или c и a_c или c и b_c. Рассмотрим з а д а ч и:

1) Построить квадрат, равновеликий данному прямоугольнику со сторонами m и n.

Обозначив сторону искомого квадрата через x, имеем: $x^2 = m \cdot n$. Сопоставляя последнее равенство с одним из трех равенств, написанных выше, замечаем, что искомая сторона x квадрата — средняя пропорциональная между сторонами прямоугольника, а потому задача сводится к построению средней пропорциональной между m и n.

П о с т р о е н и е. Пусть дан прямоугольник $ABCD$ (рис. 397) со сторонами m и n. Продолжив его сторону $AB = m$ на отрезок $BE = n$, строим на отрезке $AE = m + n$ как на диаметре полуокружность; продолжим затем CB за точку B до окружности, и тогда отрезок BK — искомая сторона x квадрата, так как $x^2 = m \cdot n$.

Построение следует проводить так, чтобы по возможности одна фигура не покрывала другой; в силу этого полуокружность на рисунке 397 построена по другую сторону от стороны прямоугольника AB.

Можно построение выполнить и иначе, если принять m за диаметр, а n — за проекцию хорды на диаметр, тогда x будет хордой, проведенной из конца диаметра и соответствующей проекции n.

На самом деле, пусть дан прямоугольник $ABCD$ (рис. 397а) со сторонами m и n. Строим на стороне $AB = m$ как на диаметре полуокружность, затем отложим на AB от точки A отрезок $AL = n$ и проводим $EL \perp AB$, тогда хорда AE — искомая сторона x квадрата $AEKM$, построенного на AE, так как $x^2 = mn$.

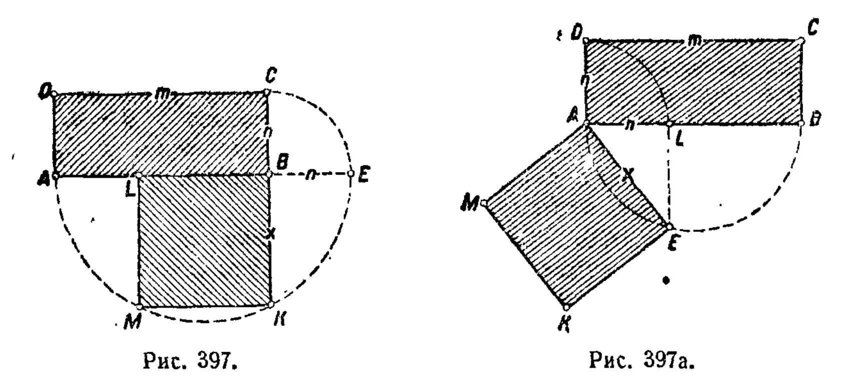


Рис. 397.

Рис. 397а.

2) Построить квадрат, равновеликий данному треугольнику, основание которого a, высота h_a.

Необходимо предварительно разъяснить, что искомая сторона квадрата x должна удовлетворять равенству $x^2 = \frac{1}{2}ah$ и что задача сводится к построению отрезка x, среднего пропорционального между отрезками $\frac{1}{2}a$ и h или a и $\frac{1}{2}h$.

3) Построить квадрат, равновеликий параллелограму, основание которого a и высота h_a.

Этими построениями дается понятие о квадратуре треугольника, параллелограма и прямоугольника; точно так же можно дать и квадратуру трапеции. Используется формула $x^2 = \frac{a+b}{2}h$, где a и b — основания трапеции, а h — ее высота.

Отметим, что *под квадратурой следует понимать или вычисление площади данной фигуры, т. е. отношение данной площади к площади квадрата, принятого за единицу меры площади, или построение квадрата, равновеликого данной фигуре, причем построение это должно быть выполнено геометрическими приемами.*

Понятие квадратуры во втором смысле шире и содержит в себе понятие о квадратуре в первом смысле.

Квадратуры элементарных прямолинейных фигур были выполнены еще в глубокой древности с применением только элементарных методов построения, т. е. пользуясь только циркулем и линейкой. Древними была выполнена с помощью циркуля и линейки квадратура некоторых криволинейных фигур, о чем в дальнейшем будет указано.

4) Периметр квадрата равен $2p$; построить равновеликий ему прямоугольник со стороною a.

Задача будет считаться решенной, если будет определена длина x — второй стороны прямоугольника. Согласно условию $ax=\left(\frac{p}{2}\right)^2$ или $x=\frac{\left(\frac{p}{2}\right)^2}{a}$, т. е. x — третье пропорциональное для отрезков $\frac{p}{2}$ и a.

Можно составить большое число подобного рода задач, если использовать выражение площадей различных прямолинейных фигур, при непременном, однако, условии, что данная и искомая фигуры равновелики. Таковы задачи:

5) Построить квадрат, площадь которого равна сумме площадей двух данных квадратов (рис. 398).

Обозначим сторону искомого квадрата через x, стороны данных квадратов — через a и b. На основании условия задачи $x^2=a^2+b^2$. Анализ этого равенства показывает, что x — гипотенуза прямоугольного треугольника, катеты которого равны a и b.

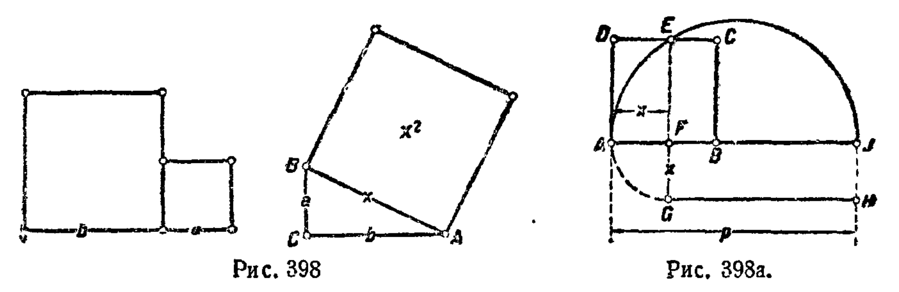


Рис. 398 Рис. 398а.

Построив прямоугольный треугольник по двум данным катетам a и b, строим квадрат на его гипотенузе AB. Площадь этого квадрата равна сумме площадей данных квадратов со сторонами a и b.

Точно так же строится квадрат, площадь которого равна разности площадей двух данных квадратов со сторонами c и b; $x^2=c^2-b^2$. Это будет квадрат, построенный на катете прямоугольного треугольника, гипотенуза которого c и другой катет которого b.

6) Превратить данный квадрат со стороною a в равновеликий прямоугольник данного периметра $2p$.

Решение задачи видно из рисунка 398а. $ABCD$ — данный квадрат, $AJ=p$ — полупериметр искомого прямоугольника; F — его вершина и $FGHJ$ — искомый прямоугольник.

Пусть x — сторона прямоугольника, тогда $p-x$ — другая его сторона, и, согласно условию,

$$(p-x)x=a^2, \quad \text{или} \quad (p-x):a=a:x,$$

т. е. сторона квадрата есть средняя пропорциональная между сторонами прямоугольника; их сумма равна $p-x+x=p$, половине периметра.

Построение. На отрезке $AJ=p$ как на диаметре строим полуокружность и на отрезке $AB=a$ — квадрат $ABCD$. Полуокружность пересекает сторону DC квадрата в точке E, и отрезок EF, перпенди-

кулярный AJ, равен стороне квадрата. Обозначив AF через x, имеем $x:a=a:(p-x)$; отрезок AF — одна из искомых сторон прямоугольника, другая его сторона $FJ=p-x$.

7) Прямоугольник со сторонами a и b превратить в равновеликий прямоугольник данного периметра $2p$.

Решение. Сперва строится квадрат, равновеликий данному прямоугольнику со сторонами a и b, а затем строится прямоугольник с данным периметром $2p$, равновеликий построенному квадрату.

Так же решается задача о превращении косоугольного параллелограма, трапеции, треугольника и вообще любого многоугольника в равновеликий прямоугольник того же периметра, как и данная фигура.

Каждую из данных фигур превращают сперва в равновеликий прямоугольник, последний — в равновеликий ему квадрат и, наконец, полученный квадрат — в равновеликий прямоугольник данного периметра.

Следует уделить достаточное внимание решению самых разнообразных задач на превращение одних фигур в другие; такие задачи способствуют развитию наблюдательности учащихся и в процессе работы наталкивают их на весьма ценные для них „открытия".

8) Построить два квадрата, площади которых относились бы, как $m:n$.

Обозначим стороны искомых квадратов через a и b; на основании условия задачи имеем: $a^2:b^2=m:n$.

Построение. Отложим на прямой MN (рис. 399) от взятой на ней точке A отрезки $AD=m$ и $DB=n$ и построим на AB как на диаметре полуокружность. Проводя затем $DC \perp AB$ до пересечения с окружностью в точке C, соединим точку C с точками A и B, тогда отрезки CA и CB — искомые стороны квадратов, так как $a^2:b^2=m:n$.

Рис. 399.

Рис. 400.

Следует обратить внимание учащихся на неопределенность данной задачи, ибо имеется бесчисленное множество отрезков, отношение которых равно $m:n$.

Следует рассмотреть с учащимися и задачи на вычисление и на самостоятельное доказательство.

9) Основания трапеции a и b. Прямая, параллельная основаниям трапеции, делит трапецию на две равновеликие части. Вычислить длину отрезка этой прямой, заключенного между непараллельными сторонами трапеции.

Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция (рис. 400), стороны оснований которой a и b и MN — прямая, делящая трапецию на две равновеликие части. Обозначим искомый отрезок MN через x. Согласно условию

$$\text{пл. } MNCD = \frac{b+x}{2} \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{2}(h_1+h_2). \qquad (1)$$

Проведя $DE \parallel CB$, находим из подобия треугольников ADE и MDK, что

$$\frac{a-b}{x-b} = \frac{h_1+h_2}{h_2}. \qquad (2)$$

Уравнение (1) можно привести к виду:

$$2(b+x) = (a+b)\frac{h_1+h_2}{h_2},$$

и, заменив в нем $\frac{h_1+h_2}{h_2}$ через $\frac{a-b}{x-b}$ из уравнения (2), имеем:

$$2(b+x) = (a+b) \cdot \frac{a-b}{x-b},$$

откуда

$$2(x^2-b^2) = a^2-b^2$$

и

$$x^2 = \frac{a^2+b^2}{2} \quad \text{и} \quad x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

10) Вычислить площадь треугольника по трем данным его сторонам $a=13$, $b=14$ и $c=15$.

Решение. Площадь треугольника $S_\triangle = \frac{bh_b}{2}$; если заменить высоту h_b через ее значение $h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, то имеем:

$$S_\triangle = \frac{b}{2} \cdot \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ кв. ед.}$$

Полученная формула выражает площадь треугольника через три его стороны; это так называемая формула Герона, названная по имени греческого математика Герона из Александрии (III в.).

Вычисления следует расположить в следующем порядке:

$$2p = a+b+c = 13+14+15 = 42;$$
$$p = 21;$$
$$p-a = 8, \; p-b = 7, \; p-c = 6,$$
$$S_\triangle = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 7 \cdot 2 \cdot 6 = 84 \text{ кв. ед.}$$

Формулой Герона целесообразно пользоваться, если стороны треугольника — числа целые, притом числа однозначные, двух- или трехзначные. В противном случае можно воспользоваться таблицами Брадиса или сперва определить проекцию одной из боковых сторон треугольника на его основание, затем — высоту треугольника и, наконец, — площадь треугольника по формуле $S_\triangle = \frac{1}{2}ah_a$. Если учащиеся умеют пользоваться

таблицами логарифмов, то вычисление площади треугольника по формуле Герона не представляет каких-либо затруднений.

11) Если площади двух прямоугольных треугольников относятся, как квадраты их гипотенуз, то треугольники подобны. Доказать.

Доказательство. Пусть S_1 и S_2 — площади данных двух прямоугольных треугольников и c_1 и c_2 — их гипотенузы. По условию:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{c_1^2}{c_2^2}. \qquad (1)$$

С другой стороны, известно, что

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}a_1b_1}{\frac{1}{2}a_2b_2}=\frac{a_1b_1}{a_2b_2}, \qquad (2)$$

где a_1, b_1 и a_2, b_2 — катеты треугольников.

Из сопоставления обоих равенств (1) и (2) имеем:

$$\frac{a_1b_1}{a_2b_2}=\frac{c_1^2}{c_2^2} \quad \text{или} \quad \frac{a_1b_1}{a_2b_2}=\frac{a_1^2+b_1^2}{a_2^2+b_2^2},$$

отсюда

$$a_1b_1\left(a_2^2+b_2^2\right)=a_2b_2\left(a_1^2+b_1^2\right)$$

или

$$a_1b_1\left(a_2^2+b_2^2\right)-a_2b_2\left(a_1^2+b_1^2\right)=0.$$

Раскрыв скобки и разложив левую часть последнего равенства на множители, имеем:

$$(a_1b_2-a_2b_1)(b_1b_2-a_1a_2)=0,$$

откуда

$$a_1b_2-a_2b_1=0, \quad \text{или} \quad b_1b_2-a_1a_2=0,$$

или, что то же самое:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2} \text{ и } \frac{a_1}{b_1}=\frac{b_2}{a_2},$$

что указывает на то, что катеты треугольников пропорциональны и, следовательно, треугольники подобны.

Героновы треугольники.

9. В рассмотренной выше задаче № 10 стороны треугольника были заданы числами 13, 14 и 15 *см*; площадь этого треугольника равна 84 кв. ед.; итак, стороны и площадь данного треугольника выражены целыми числами. Такие косоугольные треугольники, стороны и площадь которых — целые числа, называются „героновыми". Героновы треугольники можно получить из двух пифагоровых треугольников, которые имеют по одному равному катету. Действительно, если приложить такие два треугольника друг к другу так, чтобы совпали их равные катеты и другие два

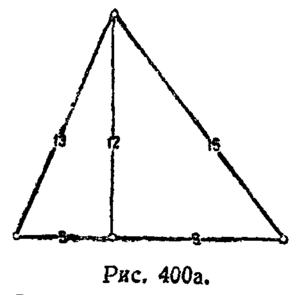


Рис. 400а.

катета составляли одну прямую, получается геронов треугольник.

Так, из прямоугольных треугольников со сторонами

$$a_1 = 5, \quad a_2 = 9,$$
$$b_1 = 12, \quad b_2 = 12,$$
$$c_1 = 13, \quad c_2 = 15$$

получается геронов треугольник со сторонами 13, 14 и 15 (рис. 400а); при этом общий катет обоих прямоугольных треугольников — высота геронова треугольника.

Следует обратить внимание на то, что в героновых треугольниках в ы с о т ы — ч и с л а р а ц и о н а л ь н ы е.

Пользуясь таблицей пифагоровых чисел, можно составить ряд героновых треугольников; для получения последних могут быть взяты и числа, равнократные пифагоровым числам.

Примеры.

1)
5, 35
12, 12
13, 37

$h = 12$; 13, 37, 40 (5 + 35)

2)
9 (21) 42,
40 (20) 40,
41 (29) 58

$h = 40$; 58, 41, 51 (9 + 42)

3)
$\begin{bmatrix} 8, & 20 \\ 15, & 21 \\ 17, & 29 \end{bmatrix}$
40, 40
75, 42
85, 58.

$h = 40$; 85, 58, 117 (75 + 42)

4)
15 (5) 15
8 (12) 36
17 (13) 39

$h = 15$; 17, 39, 44 (8 + 36)

5)
$\begin{bmatrix} 63, & 55 \\ 16, & 48 \\ 65, & 73 \end{bmatrix}$
189, 55
48, 48
195, 73

$h = 48$; 195, 73, 244

6)
$\begin{bmatrix} 7, & 21 \\ 24, & 20 \\ 25, & 29 \end{bmatrix}$
21, 21
72, 20
75 29

или

35, 126
120, 120
125, 174

75, 29, 92 или 125, 174, 161

В первом примере две тройки пифагоровых чисел непосредственно дают геронов треугольник; в примере 2 уравнены катеты, равные 20 и 40; в примере 3 уравнены катеты 8 и 20; в примере 4 уравнены катеты 5 и 15; в примере 5 — катеты 16 и 48; в примере 6 — катеты 7 и 21 или оба катета 24 и 20.

ТАБЛИЦА ГЕРОНОВЫХ ЧИСЕЛ.

a	3	4	9	10	11	12	13	13	16	20	25	25	25	26	39	41	45	52	65	116	143
b	25	13	65	35	13	55	14	20	25	51	33	39	52	75	308	260	296	195	68	325	260
c	26	15	70	39	20	65	15	21	39	65	52	56	63	91	325	273	325	209	105	429	279

Числа этой таблицы могут быть использованы для составления задач.

Вычисление R и r по сторонам a, b и c треугольника.

10. Задача. Вычислить радиус описанной около треугольника окружности, если известно, что стороны треугольника a, b и c.

Для решения задачи учащиеся должны знать, что $R = \frac{ab}{2h_c}$. Известно, что $S_\Delta = \frac{ch_c}{2}$, а потому, определив $h_c = \frac{2S}{c}$, находим:

$$R = \frac{ab \cdot c}{2 \cdot 2S} = \frac{abc}{4S}. \quad (1)$$

Следует обратить внимание на размерность формулы: $R = \frac{abc}{4S}$. В левой части имеем величину первого измерения, в правой числитель — третьего измерения, знаменатель — второго измерения, а потому сама дробь — величина первого измерения.

Следует предложить учащимся вопрос: нарушится ли равенство (1), если переставить в нем R и S, т. е. будет ли справедливо равенство:

$$S = \frac{abc}{4R} \text{ кв. ед.} \qquad (2)$$

Равенство (2) дает новое выражение для площади треугольника, выражаемой через три его стороны и радиус описанной около него окружности.

11. Задача. Вычислить радиус вписанной в данный треугольник окружности по сторонам треугольника a, b и c.

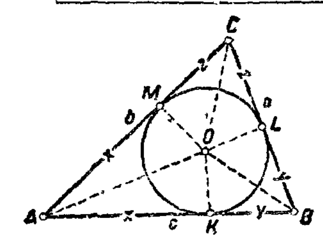


Рис. 401.

Учащимся напоминается, что площадь любого описанного многоугольника равна произведению его полупериметра на радиус окружности. Если применить эту формулу к треугольнику, то $S_\triangle = pr$ кв. ед., откуда $r = \frac{S_\triangle}{p}$.

Можно вывести формулу площади треугольника независимо от формулы площади многоугольника; следует вписать в треугольник окружность и провести радиусы к точкам касания сторон. Тогда площадь данного треугольника ABC (рис. 401) равна сумме площадей трех треугольников, получаемых соединением центра O окружности с вершинами A, B и C треугольника.

Небезынтересно показать учащимся, что отрезок x стороны треугольника, служащей касательной к вписанной окружности и прилегающей к вершине A, положим отрезок AK или отрезок AM, равен $p - a$; точно так же отрезок y стороны, прилегающей к вершине B, равен $p - b$, а отрезок z стороны, прилегающей к вершине C, равен $p - c$. Числовые значения для x, y и z получаются из решения системы трех уравнений:

$$x + y = c, \quad y + z = a, \quad z + x = b.$$

Пользуясь значениями $x = p - a$, $y = p - b$ и $z = p - c$. можно формулу Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

переписать так:

$$S = \sqrt{(x+y+z)xyz} \text{ кв. ед.},$$

так как $2p = 2x + 2y + 2z$ и, следовательно, $p = x + y + z$.

Для прямоугольного треугольника имеем:

$$r = \frac{ab}{a+b+c}.$$

Для вычисления r прямоугольного треугольника можно вывести более простую формулу. Действительно, из чертежа (рис. 402) имеем:

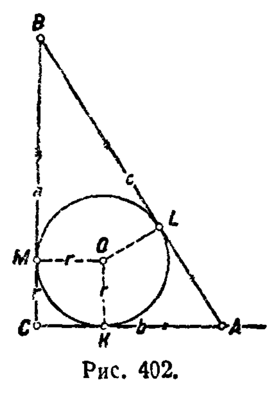


Рис. 402.

$$BL = BM = a - r$$
$$AL = AK = b - r$$
$$c = a + b - 2r \text{ или } 2r = a + b - c,$$

откуда

$$r = \frac{a + b - c}{2}.$$

Следует показать учащимся, что оба найденные выражения для r идентичны, что

$$\frac{ab}{a + b + c} = \frac{a + b - c}{2} \text{ — тождество.}$$

В самом деле, данная пропорция справедлива, если произведение крайних ее членов равно произведению средних ее членов. Проверяем:

$$2ab = (a + b - c)(a + b + c), \quad 2ab = (a + b)^2 - c^2,$$

$$2ab = a^2 + b^2 + 2ab - c^2 \text{ или } a^2 + b^2 = c^2 \text{ — получили тождество.}$$

Задача. Вычислить радиус r_a окружности, приписанной к стороне a треугольника ABC.

Площадь треугольника ABC (рис. 403) можно рассматривать как разность между суммой площадей треугольников ACO_1 и ABO_1 и площадью треугольника BO_1C:

$$S_\Delta = \frac{1}{2} AC \cdot r_a + \frac{1}{2} AB \cdot r_a - \frac{1}{2} BC \cdot r_a$$

или

$$S = \frac{1}{2} br_a + \frac{1}{2} cr_a - \frac{1}{2} ar_a,$$

откуда

$$S = \frac{r_a(b + c - a)}{2} = \frac{r_a(2p - 2a)}{2} = r_a(p - a)$$

и, следовательно, $r_a = \frac{S}{p - a}$. По аналогии учащиеся должны уметь написать:

$$r_b = \frac{S}{p - b} \text{ и } r_c = \frac{S}{p - c}.$$

Таким образом, имеются еще выражения для площади треугольника через радиус приписанной окружности.

$$S = (p - a)r_a, \quad S = (p - b)r_b, \quad S = (p - c)r_c \text{ кв. ед.}$$

Не лишне указать учащимся, что для героновых треугольников радиусы вписанной, описанной и приписанной окружностей — числа рациональные. При проверке формул следует всегда обращать внимание на их размерность. Если оказывается, что формула неоднородна, то это указывает на то, что она или записана неправильно или само решение неверно.

12. Выполнение чертежа с приписанными окружностями представляет для учащихся обычно значительные затруднения, поэтому следует им показать, как можно быстро выполнить требуемый чертеж. На самом деле, внимательно рассматривая рисунок 403, нетрудно убедиться в том, что в треугольнике $O_1O_2O_3$ прямые O_1A, O_1B и O_1C являются его высотами, пересекающимися в точке O (ортоцентре), так как биссектрисы двух смежных углов взаимно перпендикулярны; в то же время эти высоты служат биссектрисами треугольника ABC, вершины которого — основания высот. Отсюда следует, что для быстрого выполнения чертежа надо сперва построить треугольник $O_1O_2O_3$ и три его высоты, пересекающиеся в точке O, и если затем соединить основания A, B и C этих высот, то получится треугольник ABC, для которого O — центр вписанной окружности, а O_1, O_2 и O_3 — центры приписанных окружностей.

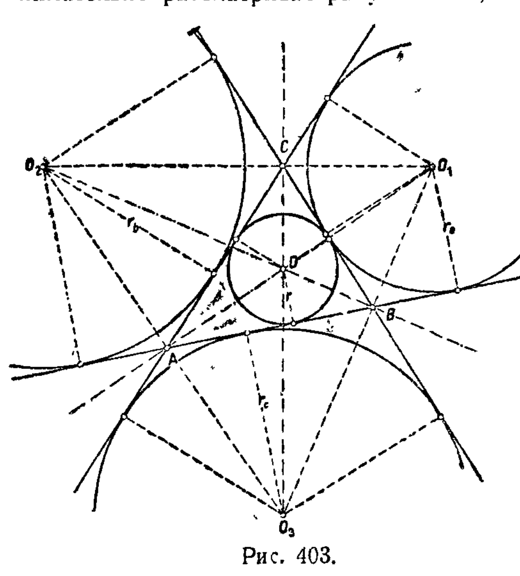


Рис. 403.

Можно было бы итти и обратным путем: построить по трем сторонам данный треугольник ABC и провести его биссектрисы, тогда точка их пересечения — центр вписанной окружности. Если провести затем через вершины треугольника прямые, перпендикулярные к биссектрисам, проведенным из этих вершин, до их взаимного пересечения, то получится треугольник $O_1O_2O_3$, вершины которого служат центрами приписанных окружностей.

Если требуется начертить треугольник с данными: вписанной (r) и одной приписанной (r_a) окружностями и линией их центров d, причем $r_a > r$ и $d \geqq r_a + r$ (рис. 404), то следует отложить на произвольной прямой отрезок $OO_1 = d$ и приняв концы его за центры, построить окружности радиусов r_a и r, затем провести к ним две внешние касательные, пересекающиеся в точке A, и одну общую внутреннюю касательную, пересекающую внешние касательные в точках B и C. Тогда окружность O — вписанная в треугольник ABC и окружность O_1 — приписанная, AOO_1 — биссектриса угла A, на которой лежит и линия центров $OO_1 = d$. Другое решение — симметричное этому. Если $d = r_a + r$, то решение одно и треугольник равнобедренный, с вершиной в точке A.

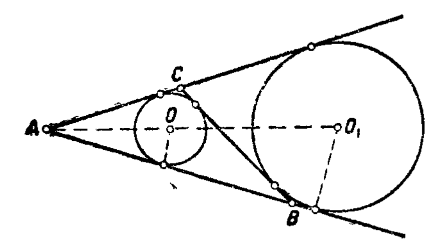


Рис. 404.

13. Небезынтересно рассмотреть с учащимися, если позволяет время, зависимость между величинами r, r_a, r_b и r_c.

Следует взять величины, обратные радиусам r_a, r_b, r_c и r:

$$\frac{1}{r_a}=\frac{p-a}{S}; \quad \frac{1}{r_b}=\frac{p-b}{S}, \quad \frac{1}{r_c}=\frac{p-c}{S} \text{ и } \frac{1}{r}=\frac{p}{S},$$

и если найти сумму $\frac{1}{r_a}$, $\frac{1}{r_b}$ и $\frac{1}{r_c}$, то оказывается, что

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{p-a}{S}+\frac{p-b}{S}+\frac{p-c}{S}=\frac{3p-a-b-c}{S}=$$
$$=\frac{3p-2p}{S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r},$$

или

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}.$$

Итак, **для любого треугольника сумма обратных величин радиусов приписанных окружностей равна обратной величине радиуса вписанной окружности.**

Доказательство последней теоремы может быть дано учащимся как тема кружковой работы.

Перемножая почленно левые и правые части формул:

$$r=\frac{S}{p}, \quad r_a=\frac{S}{p-a}, \quad r_b=\frac{S}{p-b}, \quad r_c=\frac{S}{p-c},$$

получим:

$$r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c=\frac{S^4}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{S^4}{S^2}=S^2,$$

откуда

$$S=\sqrt{r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c}.$$

Итак, **площадь треугольника равна квадратному корню из произведения радиусов четырех окружностей: вписанной и трех приписанных.**

Рассмотрение данной теоремы может также служить темой для кружковой работы учащихся.

Пример. По данным радиусам $r_a=2$, $r_b=3$, $r_c=6$ приписанных окружностей вычислить площадь треугольника и его стороны.

Решение. а) Определение площади треугольника:

Если $r_a=2$, $r_b=3$, $r_c=6$, то $\frac{1}{r}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$; $r=1$.

$$S=\sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot 6}=6 \text{ кв. ед.}$$

б) Определение сторон треугольника:

$$p-a=\frac{S}{r_a}=\frac{6}{2}=3; \quad p-b=\frac{S}{r_b}=\frac{6}{3}=2 \quad \text{и} \quad p-c=\frac{S}{r_c}=\frac{6}{6}=1.$$

следовательно

$$a=p-b+p-c=3,$$
$$b=p-c+p-a=4,$$
$$c=p-a+p-b=5.$$

Определяемый треугольник — прямоугольный, так как $5^2=4^2+3^2$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ.

1. Построить квадрат, площадь которого равна сумме площадей трех и более данных квадратов.

2. Построив фигуру, данную на рисунке 405, предложить учащимся доказать, что части фигуры, отмеченные одинаковыми римскими цифрами, равны.

Последний рисунок может быть использован для „занимательной" геометрической задачи.

Квадрат, построенный на гипотенузе, следует разбить на части, как показано на рисунке 405, а затем разрезать на 5 фигур. После этого учащимся предлагается составить из этих фигур или один или два квадрата, которыми и следует покрыть в одном случае квадрат, построенный на гипотенузе, в другом случае квадраты, построенные на катетах.

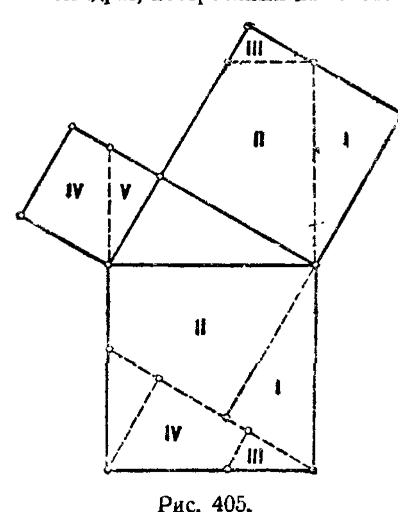


Рис. 405.

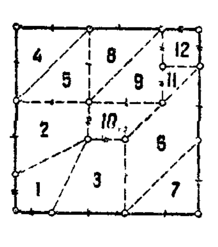


Рис. 406.

3. Составить два квадрата из одного квадрата, разрезанного на 12 частей, как показано на рисунке 406. Равные отрезки перечеркнуты на рисунке. Ответ на рисунке 407.

4. Из всех семи частей фигуры, разрезанной на части, как показано на рисунке 408, составить: 1) квадрат и 2) прямоугольник с неравными сторонами. Равные отрезки перечеркнуты на рисунке.

Такие задачи представляют для учащихся большой интерес, и они сами нередко придумывают подобного рода задачи.

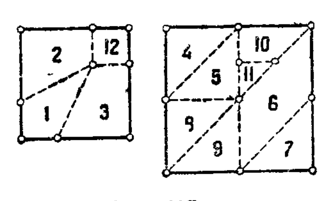


Рис. 407.

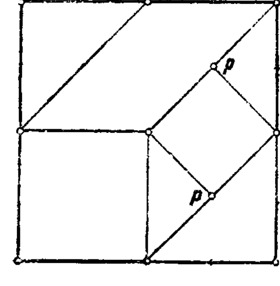


Рис. 408.

5. Дать геометрическую интерпретацию формул:

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab, \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2,$$

и с помощью чертежа пояснить равенства:

$$a(b \pm c) = ab \pm ac; \quad (a \pm b)(c \pm d) = ac + bc \pm ad \pm bd;$$

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2); \quad (a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab.$$

6. Вычислить разрезы окопов, данные на рисунке 409; размеры даны в метрах; глубина окопов отмечена отрицательным числом (ниже уровня земли).

Отв.: 1) 0,54 $м^2$; 2) 0,75 $м^2$; 3) ≈ 1,4 $м^2$.

7. Дан параллелограм; построить равновеликий ему параллелограм с данным основанием *a*.

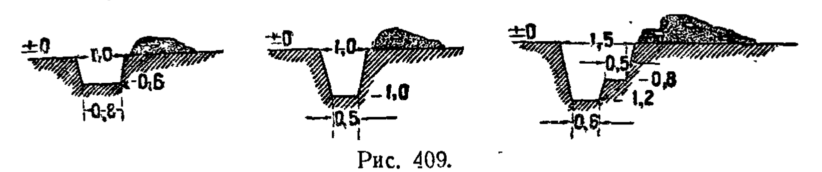


Рис. 409.

Следует продолжить сторону AB параллелограма $ABCD$ (рис. 410) на отрезок BE, равный основанию a искомого параллелограма, и провести $EF \parallel AC$ до пересечения с продолжением стороны DC в точке F. Если затем продолжить FB до пересечения с продолжением DA в точке G, то AG — вторая сторона искомого параллелограма и $JKBE$ — искомый параллелограм, равновеликий данному $ABCD$.

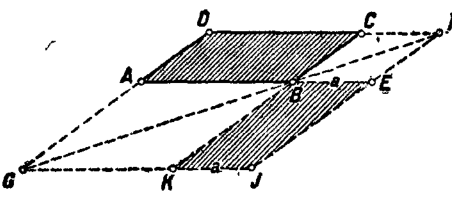


Рис. 410.

8. Доказать для треугольника, что

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}.$$

В самом деле:

$$\frac{1}{h_a}=\frac{a}{2S};\quad \frac{1}{h_b}=\frac{b}{2S};\quad \frac{1}{h_c}=\frac{c}{2S};$$

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a+b+c}{2S}=\frac{2p}{2S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r}.$$

9. Доказать, что в треугольнике

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_c}=\frac{2}{h_b}=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_b}.$$

В самом деле,

$$\frac{1}{r_a}=\frac{p-a}{S};\quad \frac{1}{r_c}=\frac{p-c}{S}$$

и

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_c}=\frac{p-a+p-c}{S}=\frac{a+b+c-a-c}{S}=\frac{b}{S}=\frac{b}{\frac{1}{2}bh_b}=\frac{2}{h_b};$$

вторая часть вытекает из приведенной выше формулы:

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r},$$

откуда

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_b}.$$

10. Если площади двух равнобедренных треугольников относятся, как квадраты их оснований, то треугольники подобны. Доказать.

Доказывается аналогично доказательству, приведенному в задаче 11 на стр. 250.

Обильный материал на задачи на построение имеется в задачнике Александрова, а на задачи на вычисление — у Рыбкина и у Тер-Степанова. В задачах последнего задачника числовые данные подобраны настолько удачно, что они не заслоняют геометрического содержания, и учащиеся тем самым имеют возможность сосредоточить свое внимание по преимуществу на взаимоположении и взаимозависимости элементов искомых или заданных фигур.

Золотое деление.

14. Учащиеся знакомы с решением задач на построение прямоугольных треугольников, если даны или основные элементы или отдельные неосновные элементы треугольников. Следует рассмотреть с учащимися решение и следующей задачи:

Построить прямоугольный треугольник по данному катету b и проекции a_c другого катета на гипотенузу.

Обозначим гипотенузу через c, тогда $b^2 = c(c - a_c)$. Из последнего равенства следует, что b — сторона квадрата, равновеликого прямоугольнику, разность смежных сторон которого равна a_c, так как $c - c + a_c = a_c$. Решение задачи на построение прямоугольника по сумме смежных его сторон, равновеликого квадрату, *было* дано выше.

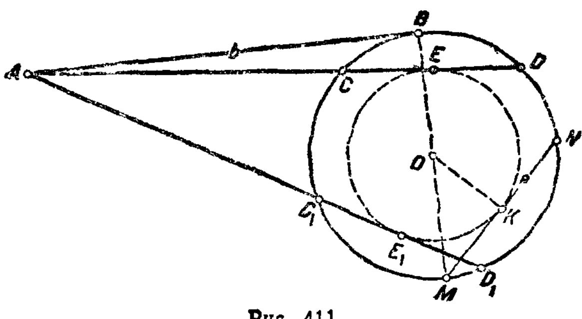


Рис. 411.

Разбор равенства указывает, что b — длина касательной, c — секущая, а $c - a_c$ — внешняя часть секущей и a_c, таким образом, — хорда окружности.

Возьмем отрезок $AB = b$ (рис. 411) и в конце B отрезка построим $BM \perp AB$. На этом перпендикуляре берем произвольную точку O и, приняв ее за центр, проводим радиусом OB окружность; тогда AB — касательная к этой окружности. Если затем провести в данной окружности хорду $MN = a_c$ и концентрическую окружность радиуса, равного расстоянию OK от центра до хорды $MN = a_c$, то касательная AE, проведенная из точки A к этой концентрической окружности и продолженная до пересечения с первой окружностью в точке D, и даст отрезок $AD = c$, удовлетворяющий равенству $b^2 = c(c - a_c)$. В самом деле, $CD = a_c = C_1D_1$ и $AC = c - a_c$. После этого остается построить прямоугольный треугольник по данному катету b и гипотенузе c.

Окружность, которую мы провели вначале, была произвольного радиуса; ясно, что диаметр ее должен быть больше хорды $MN = a_c$, так как иначе нельзя было бы построить треугольник. Однако, пользуясь произвольною окружностью, лучше всего выбрать ее такою, чтобы диаметр ее равнялся a_c, т. е. чтобы a_c была наибольшею из возможных хорд. В этом случае построение значительно упростится.

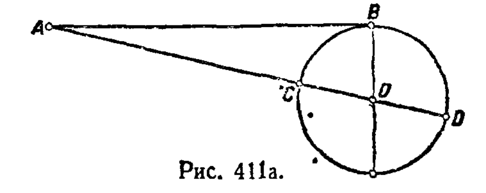


Рис. 411а.

Чтобы навести учащихся на мысль построить окружность диаметра a_c, следует поставить им примерно такие вопросы: как изменится вспомогательная окружность, если уменьшать расстояние от проводимой хорды до центра? чем будет служить хорда, если расстояние от хорды до центра станет равным нулю? Второе построение дано на рисунке 411а.

После этого следует рассмотреть частный случай, когда $b = a_c$, тогда имеем равенстно:

$$a_c^2 = c(c - a_c), \quad \text{или} \quad \frac{c}{a_c} = \frac{a_c}{c - a_e};$$

последнее равенство означает, что отрезок c надо разделить на два таких отрезка, чтобы бо́льшая его часть была средней пропорциональной между всем отрезком и меньшей его частью. Это задача на так называемое „золотое сечение", sectio aurea называли его. У Евклида задача эта формулирована так: разделить данный отрезок в среднем и в крайнем отношении.

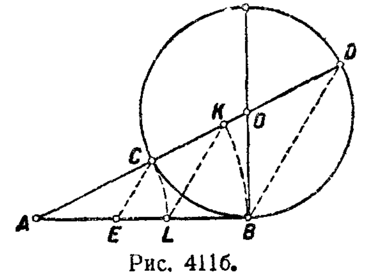


Рис. 411б.

Лука Пачиоли в 1509 г. назвал такое деление отрезка „божественной пропорцией" — divina proporcione, а Кеплер — „божественным сечением"; фантазия Кеплера связывала такое деление с мирозданием; после него такое деление получило название „золотого деления".

Итак, если дано a_c, то задача сводится к нахождению такого отрезка, данная часть которого есть „золотой" отрезок искомого отрезка.

Если же дано c и требуется построить такой прямоугольный треугольник, один из катетов которого равнялся бы проекции другого катета на гипотенузу, то это означает, что данный отрезок c надо разделить по правилу золотого деления. Построение в данном случае аналогично построению, которое было приведено выше. CD (рис. 411б) — „золотой" отрезок отрезка AD; в самом деле, $(AC + CD) \cdot AC = AB^2 = CD^2$ или $\frac{AC + CD}{CD} = \frac{CD}{AC}$, т. е. бо́льшая часть CD отрезка $AD = AC + CD$ есть среднее пропорциональное между всем отрезком AD и его меньшею частью. Чтобы получить золотое деление отрезка AB, соединяют точку D с точкой B и проводят через точку C прямую $CE \parallel DB$. После этого ставится вопрос, как получить золотое деление, исходя ие из точки B отрезка AB, а из другого его конца A. Перенеся AB на AD так, чтобы $AK = AB$, проводят затем $KL \parallel DB$, и тогда AL — „золотой" отрезок.

Если учащиеся, рассматривая чертеж, выскажут предположение, что $AC = AL$, то необходимо их предположеине подкрепить соответствующим доказательством; оно следующее:

Обозначим: $AC = x$; тогда $AD = x + c$ и $c^2 = x(x + c)$, откуда $x^2 = c^2 - xc = c(c - x)$; это равенство и подтверждает справедливость верного предположения учащихся.

Обычно при решении данной задачи учащимся дается готовый чертеж и построение; в лучшем случае, учащиеся принимают только участие в доказательстве справедливости предложения, приводимого в задаче. От такого решения вопроса следует отказаться, наоборот — разбором изложенных выше задач следует шаг за шагом подвести учащихся к пониманию решения проблемы „золотого" деления, и тогда у них не может появиться недоуменный вопрос: откуда же берется такое построение?

Важное значение этой задачи учащиеся уяснят себе, когда им потребуется строить правильные десятиугольник, пятиугольник и пятнадцатиугольник. Еще более осмыслят они эту задачу, если уделят внимание „золотому делению“ в природе. Интересующихся „золотым делением“ отсылаем к небольшой брошюре Тиммердинга „Золотое сечение“ (перевод с немецкого, П., 1924).

Решая равенство $x^2=c^2-xc$ и отбрасывая отрицательное решение, получаем:

$$x=\frac{c}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)=AC \quad \text{и} \quad AD=\frac{c}{2}\left(\sqrt{5}+1\right).$$

В самом деле, уравнение $x^2+cx-c^2=0$ дает:

$$x_{1;2}=-\frac{c}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+c^2}\quad \begin{cases} x_1=-\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+c^2} \\ x_2=-\frac{c}{2}-\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+c^2} \end{cases}$$

Значение корня x_1 показывает, как следует выполнить построение: $\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+c^2}$ — гипотенуза AO прямоугольного треугольника ABO (рис. 411б), катеты которого $AB=c$ и $BO=\frac{c}{2}$, и $x=AO-CO=$ $=\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+c^2}-\frac{c}{2}$. Построение это обычно встречается в учебниках геометрии.

Задачи на построение треугольника по трем неосновным элементам.

15. Приводимые ниже задачи на построение могут служить темами для работы в математическом кружке или для самостоятельных докладов учащихся, наиболее успевающих и интересующихся геометрией. Решение этих задач в часы классных занятий отнимает обычно много времени и потому не включается в план обычных классных занятий.

Задачи: 1) Построение треугольника по трем его медианам m_a, m_b и m_c сводится, как известно, к построению другого треугольника по трем его сторонам $\frac{2}{3}m_a$, $\frac{2}{3}m_b$ и $\frac{2}{3}m_c$; площадь первого треугольника в три раза больше площади треугольника со сторонами $\frac{2}{3}m_a$, $\frac{2}{3}m_b$ и $\frac{2}{3}m_c$, которая вычисляется по формуле Герона.

2) Построить треугольник по данным радиусам r_a, r_b и r_c приписанных окружностей.

В настоящей главе дано решение задачи на вычисление радиуса r' и сторон треугольника по данным радиусам r_a, r_b и r_c приписанных окружностей.

Для решения данной задачи на построение воспользуемся формулой:

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}.$$

Умножим все члены равенства на mn, где m и n — числа, выражающие длину каких-либо отрезков. Построение выражений $\frac{mn}{r_a}$, $\frac{mn}{r_b}$, $\frac{mn}{r_c}$

и $\frac{mn}{r}$ не представляет каких-либо затруднений, каждое из них — четвертый пропорциональный отрезок к трем данным m, n и r_a и т. д.

Итак, можно построить отрезки $x_1=\frac{mn}{r_a}$, $x_2=\frac{mn}{r_b}$ и $x_3=\frac{mn}{c}$, а затем и отрезок $x=x_1+x_2+x_3$, так что

$$x=\frac{mn}{r} \quad \text{или} \quad r=\frac{mn}{x}.$$

Построив r — четвертый пропорциональный отрезок для отрезков m, n и x, находим радиус окружности, вписанной в искомый треугольник.

Далее известно, что $S_\triangle=\sqrt{r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c}$, или $S_\triangle=\sqrt{r\cdot r_a}\sqrt{r_b\cdot r_c}$.

Пусть $\sqrt{rr_a}=y$ и $\sqrt{r_br_c}=z$, тогда строим отрезки y и z как средние пропорциональные отрезков r и r_a, r_b и r_c, и, таким образом, $S=yz$, т. е. S — площадь треугольника — равна площади прямоугольника со сторонами y и z.

Кроме того известно, что

$$\frac{S}{r}=p, \quad \frac{S}{r_a}=p-a, \quad \frac{S}{r_b}=p-b \quad \text{и} \quad \frac{S}{r_c}=p-c,$$

или

$$\frac{yz}{r}=p, \quad \frac{yz}{r_a}=p-a, \quad \frac{yz}{r_b}=p-b \quad \text{и} \quad \frac{yz}{r_c}=p-c.$$

Построив отрезки p, $p-a$, $p-b$, $p-c$ как четвертые пропорциональные к отрезкам y, z, r и т. д., находим стороны треугольника:

$$a=p-b+p-c; \quad b=p-c+p-a; \quad c=p-a+p-b.$$

Таким образом, задача сведена к основной задаче — к построению треугольника по трем сторонам.

Следует заметить, что весьма полезно задачи на построение предварять построением фигуры, соответствующей данным условиям задачи.

3) Построить треугольник по данным его высотам h_a, h_b и h_c и вычислить его площадь и стороны.

Используем равенства:

$$a:b:c=\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}, \tag{1}$$

$$h_a:h_b:h_c=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}, \tag{2}$$

которые указывают, что

стороны (высоты) треугольника обратно пропорциональны их высотам (сторонам).

Нередко случается, что при сопоставлении равенств (1) и (2) приходят к выводу: если в первом случае a, b и c — стороны треугольника и h_a, h_b и h_c — его высоты, то во втором случае h_a, h_b и h_c могут быть приняты за стороны треугольника, а a, b и c — за его высоты.

Чтобы показать, что такого соответствия может и не быть, следует построить один треугольник со сторонами a, b и c и другой треугольник со сторонами h_a, h_b и h_c (рис. 412). Сравнение обоих треугольников указывает на неправильность сделанного вывода. Измерение высот h_1, h_2 и h_3 второго треугольника $A_1B_1C_1$, стороны которого — h_a, h_b и h_c,

показывает, что h_1 не равно a, h_2 не равно b и h_3 не равно c. Можно показать это и так: $h_1 < h_c$, но $h_c < a$, значит $h_1 < a$ и т. д.

Обозначив площадь треугольника ABC через S, площадь треугольника $A_1B_1C_1$ — через S_1, имеем:

$$\frac{S}{S_1}=\frac{ah_a}{h_ah_1}=\frac{a}{h_1} \quad \text{или} \quad \frac{S}{S_1}=\frac{bh_b}{h_bh_2}=\frac{b}{h_2} \quad \text{или} \quad \frac{S}{S_1}=\frac{ch_c}{h_ch_3}=\frac{c}{h_3},$$

откуда $\frac{a}{h_1}=\frac{b}{h_2}=\frac{c}{h_3}$, т. е. высоты вспомогательного треугольника пропорциональны, но не равны сторонам данного треугольника; если высоты треугольника $A_1B_1C_1$ принять за стороны нового треугольника, то этот последний будет подобен данному. Но $h_1:h_2:h_3=\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}$, а потому треугольники со сторонами a, b и c и $\frac{1}{h_a}$, $\frac{1}{h_b}$ и $\frac{1}{h_c}$ — подобны.

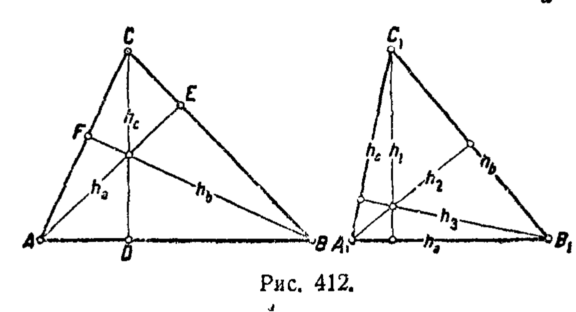


Рис. 412.

В исключительных случаях такой показ бывает и невозможен; так, например, если допустить, что высоты треугольника относятся, как $5:6:12$, то стороны его соответственно относятся, как $\frac{1}{5}:\frac{1}{6}:\frac{1}{12}$ или как $12:10:5$; построить треугольник со сторонами $12a$, $10a$ и $5a$ возможно, ибо $12a < 10a + 5a$, а вспомогательный треугольник со сторонами $5b$, $6b$ и $12b$ построить нельзя. Это, однако, не значит, что задача неразрешима.

Построить треугольник по трем данным высотам h_a, h_b и h_c можно тем же путем, как это сделано в предыдущей задаче.

Действительно, если $a:b:c=\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}$, то, умножив все члены второго отношения на mn, где m и n — числа, выражающие длину каких-либо отрезков, имеем:

$$a:b:c=\frac{mn}{h_a}:\frac{mn}{h_b}:\frac{mn}{h_c}.$$

Строим $a_1=\frac{mn}{h_a}$, $b_1=\frac{mn}{h_b}$ и $c_1=\frac{mn}{h_c}$, а затем — треугольник со сторонами a_1, b_1 и c_1, подобный искомому, стороны которого — a, b и c. Кроме того

$$\frac{S}{S_1}=\frac{a^2}{a_1^2} \quad \text{или} \quad \frac{\frac{ah_a}{2}}{S_1}=\frac{a^2}{a_1^2},$$

откуда

$$a=\frac{a_1^2h_a}{2S_1},$$

где

$$a_1=\frac{mn}{h_a} \quad \text{и} \quad S_1=\sqrt{p_1(p_1-a_1)(p_1-b_1)(p_1-c_1)}$$

$$a=\frac{m^2n^2}{2h_a\sqrt{p_1(p_1-a_1)(p_1-b_1)(p_1-c_1)}}.$$

Пусть $\sqrt{p(p_1-a_1)}=x$ и $\sqrt{(p_1-b_1)(p_1-c_1)}=y$; построить отрезки x и y мы умеем, а потому

$$a=\frac{m^2n^2}{2h_axy}=\frac{m^2}{2h_a}\cdot\frac{n}{x}\cdot\frac{n}{y}.$$

Построив $\frac{m^2}{2h_a}=z$ и $\frac{zn}{x}=v$, получим, наконец, $a=\frac{vn}{y}$ — сторону искомого треугольника.

Зная одну из сторон a искомого треугольника, легко построить этот треугольник, подобный треугольнику со сторонами a, b и c, если известно, что стороны a и a_1 сходственны.

Построение последним методом всегда возможно, а поэтому, естественно, является вопрос, — зачем же тогда прибегать к первому методу, не всегда дающему ответ на вопрос. На это надо возразить следующее: необходимо, чтобы учащийся осознал, что бывают случаи, когда построение невозможно, но что отсюда еще не вытекает, что фигуры, которую требуется построить, не существует. Осознание этого должно предостеречь учащегося от опрометчивых заключений.

Теперь остается еще вычислить площадь и стороны треугольника, высоты которого равны h_a, h_b и h_c.

Пусть искомые стороны треугольника равны a, b и c и площадь его равна S. Обозначим через S_1 площадь треугольника со сторонами $\frac{1}{h_a}$, $\frac{1}{h_b}$ и $\frac{1}{h_c}$; по формуле Герона имеем:

$$S_1^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\times$$
$$\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right).$$

Вследствие подобия обоих треугольников имеем:

$$\frac{S}{S_1}=\frac{a^2}{\left(\frac{1}{h_a}\right)^2}=a^2h_a^2=4S^2 \quad \text{и} \quad S=\frac{1}{4S_1},$$

или

$$S=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)}}.$$

На основании же равенств

$$S=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2},$$

находим:

$$a=\frac{2S}{h_a};\quad b=\frac{2S}{h_b} \quad \text{и} \quad c=\frac{2S}{h_c}.$$

Следует рассмотреть и другой прием решения.

Можно из произвольной точки M провести три луча и отложить на них от точки M отрезки $MA=h_a$, $MB=h_b$ и $MC=h_c$ (рис. 413) и провести через точки A, B и C окружность. Продолжив затем MA, MB и MC за вершину M до пересечения с окружностью в точках A_1, B_1 и C_1, получим отрезки MA_1, MB_1 и MC_1, которые являются сторонами треугольника, подобного искомому, так как отрезки эти обратно пропорциональны отрезкам h_a, h_b и h_c: они относятся, как $\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}$; в самом деле, $MA \cdot MA_1 = MB \cdot MB_1 = MC \cdot MC_1$ на основании теоремы об отрезках хорд данной окружности, пересекающихся в одной точке.

Сравнительно громоздкое построение можно несколько упростить, если сперва построить соответствующую окружность, взять внутри нее соответствующую точку M и, приняв ее за центр, провести дуги радиусов h_a, h_b и h_c, приняв $h_a > h_b > h_c$.

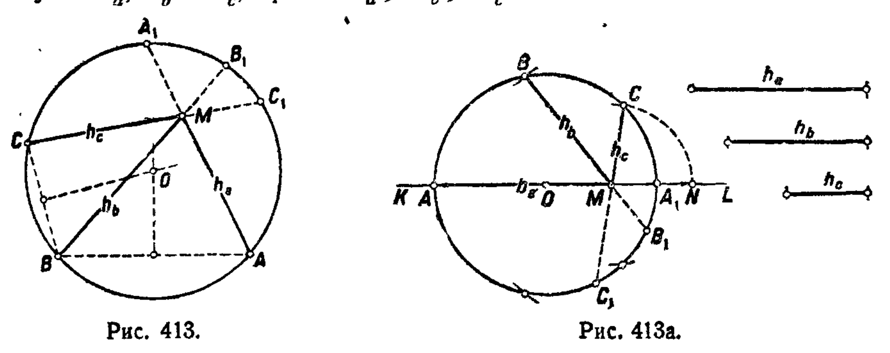


Рис. 413. Рис. 413а.

Следует выбрать такую окружность, чтобы диаметр ее D был связан следующим неравенством:

$$h_a < D < h_b + h_c.$$

Итак, отложим на прямой (рис. 413а) отрезки $MA = h_a$ и $MN = h_c$ и, приняв за центр точку O на отрезке $AN \left(\frac{1}{2}AM < AO < \frac{1}{2}AN\right)$, проводим радиусом OA окружность, а затем засекаем, приняв за центр точку M, дуги радиусами $MN = h_c = MC$ и $MB = h_b$ и проводим через точки C и M, а также через B и M секущие CC_1 и BB_1; таким образом, $MA = h_a$, $MB = h_b$ и $MC = h_c$, а отрезки MA_1, MB_1 и MC_1 будут сторонами треугольника, подобного искомому.

В дальнейшем построение такое же, как и данное выше.

Подробный разбор данной задачи отнюдь не означает, что так должен быть разобран каждый вопрос. На этом примере учащиеся научаются приемам, применяемым при решении задач на построение. Разумеется, могут быть взяты и другие задачи. Наша задача заключалась в том, чтобы показать хотя бы на одном примере некоторые из наиболее употребительных приемов.

Заключение.

16. В последнем разделе были даны решения задач на построение методом алгебраического анализа. Этот метод состоит из следующих частей: 1) вопрос приводится к составлению уравнений; 2) решение уравнений; 3) исследование полученных формул и 4) по-

строение формул. Метод алгебраического анализа, наиболее употребительный и изящный, почти всегда приводит к цели.

Кроме него основными методами решения являются уже рассмотренные раньше методы 1) геометрических мест и 2) подобия. Решение задач методом геометрических мест приведены в § 13, методом подобия — в § 15.

Кроме того иногда пользуются методамми: 1) вспомогательных фигур, 2) параллельного перенесения, 3) вращения и 4) симметрии.

Чаще всего при решении задач на построение пользуются не одним методом, а двумя или несколькими методами.

Перечисленные методы и еще некоторые другие разобраны в книге И. Александрова „Задачи на построение".

Необходимо помнить, что решение всякой сложной задачи на построение следует расчленить на 4 части:

1) Допускают, что задача решена и требуемая фигура построена, и делают от руки набросок искомой фигуры; внимательно рассматривая набросок, находят зависимость между даными и искомыми, которые позволили бы привести решение задачи к основным или уже известным задачам на построение. Эта часть решения, называемая **анализом**, дает возможность составить план решения.

2) Вторая часть — выполнение самого **построения** согласно плану.

3) Третья часть — **доказательство** самого построения, т. е. проверка, удовлетворяет ли построенная фигура всем условиям задачи.

4) **Исследование** решения состоит в рассмотрении, возможно ли решение задачи по заданным данным, и установлении, сколько решений допускает задача в зависимости от заданных условий.

Приведенные в настоящей книге решения задач позволяют в достаточной мере судить о разнообразии приемов и методов решения задач. Исключительное значение решения задач на построение очевидно: оно расширяет кругозор учащихся, закрепляет проработанный ими теоретический материал, обогащает их запас знаний.

§ 19. Правильные многоугольники.

1. Прежде чем приступить к рассмотрению темы „Правильные многоугольники", следует остановить внимание учащихся на уже знакомых им правильных фигурах. Следует сперва рассмотреть равностороний треугольник и указать, что равенство его сторон влечет за собою и равенство его углов, что равносторонний треугольник есть в то же время и равноугольный и, наоборот, равноугольный есть в то же время и равносторонний.

Затем следует рассмотреть квадрат — четырехугольник, у которого все стороны равны и все углы равны. Необходимо подчеркнуть, что четырехугольники не обладают свойством, характерным для треугольников; так, равенство сторон косоугольного ромба не влечет за собою равенства его углов, с другой стороны, равенство углов прямоугольника не влечет за собою равенства его сторон.

Необходимо также сопоставить условия подобия треугольников и четырехугольников; два треугольника подобны, если или углы их равны или стороны их пропорциональны; два четырехугольника или много-

угольника вообще подобны, если и углы их равны и соответственные стороны пропорциональны.

Дав определение правильных многоугольников, следует отметить, что внешний угол правильного n-угольника равен $\frac{4d}{n}$ или $\frac{360°}{n}$, а внутренний его угол равен $180° - \frac{360°}{n} = 180°\left(1 - \frac{2}{n}\right)$; не лишне указать, что внешний угол при $n \rightarrow \infty$ уменьшается и приближается к 0, внутренний же угол при $n \rightarrow \infty$ увеличивается и приближается к 180°.

Установив затем, что одноименные правильные многоугольники 1) подобны и 2) при равенстве их сторон равны, следует показать, что построение правильных многоугольников возможно через деление окружности на равные части; деление же окружности не всегда выполнимо конечным числом операций с помощью циркуля и линейки.

Следует также доказать, 1) что правильные многоугольники хордиальны, т. е. через их вершины можно провести окружность, и 2) что можно построить окружность, касающуюся всех сторон правильного многоугольника. В первом случае окружности называются описанными, во втором — вписанными, и в соответствии с этим и многоугольники называются вписанными или описанными.

Заметим, что считаем целесообразным заменить термин „описанный" более удачным термином „касательный".

В правильных многоугольниках центры вписанной и описанной окружностей совпадают и носят общее название центра правильного многоугольника; радиус вписанной окружности иначе называется еще и апофемой правильного многоугольника.

2. Указав на зависимость между элементами правильных одноименных многоугольников, которая заключается в том, что: 1) стороны пропорциональны радиусам, апофемам, периметрам, соответствующим диагоналям и 2) площади их пропорциональны квадратам радиусов, апофем, периметров и соответствующих диагоналей, надо остановиться на определяющем треугольнике правильного многоугольника. Так называется треугольник, вершина которого лежит в центре многоугольника и основанием которого служит сторона многоугольника. Угол при вершине этого треугольника, так же как и внешний угол многоугольника, равен $\frac{360°}{n}$.

Затем выполняется построение правильного четырехугольника, шести угольника и треугольника, вписанных в данную окружность, и вычисляются их стороны в зависимости от радиуса окружности: $a_3 = R\sqrt{3}$ $a_4 = R\sqrt{2}$ и $a_6 = R$. Необходимо решить и обратную задачу: по данно стороне вписанного треугольника или многоугольника определить радиус окружности:

$$R = \frac{a_3}{\sqrt{3}} = \frac{a_3\sqrt{3}}{3}; \quad R = \frac{a_4}{\sqrt{2}} = \frac{a_4\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad R = a_6.$$

Те же вопросы должны быть решены для правильных описанны треугольника, четырехугольника и шестиугольника:

$$b_3 = 2R\sqrt{3}, \quad b_4 = 2R \quad \text{и} \quad b_6 = \frac{2R\sqrt{3}}{3}.$$

Следует пояснить учащимся, что выражение для b_6 получается на основании следующих соображений: правильные описанный и вписанный шестиугольники подобны, и потому их стороны относятся, как их апофемы (рис. 414), т. е.

$$\frac{b_6}{a_6}=\frac{R}{x},$$

откуда

$$b_6=\frac{Ra_6}{x}=\frac{R\cdot R}{x}=\frac{R^2}{x},$$

при этом

Рис. 414.

$$x^2=R^2-\left(\frac{a_6}{2}\right)^2=R^2-\frac{R^2}{4}=\frac{3R^2}{4} \quad \text{и} \quad x=\frac{R}{2}\sqrt{3};$$

следовательно,

$$b_6=\frac{2R^2}{R\sqrt{3}}=\frac{2R\sqrt{3}}{3}.$$

3. Приемом, примененным для вычисления b_6, **определяют** b_n **по данным** a_n и R:

$$b_n=\frac{a_nR}{\sqrt{R^2-\frac{a_n^2}{4}}}.$$

Из этой формулы можно определить a_n по данным b_n и R.

Для этого следует возвести обе части последнего равенства в квадрат, привести обе части вновь полученного равенства к одному знаменателю, а затем отбросить его.

$$b_n^2=\frac{4a_n^2R^2}{4R^2-a_n^2}, \quad 4R^2b_n^2-a_n^2b_n^2=4a_n^2R^2,$$

или

$$4R^2b_n^2=a_n^2(4R^2+b_n^2),$$

откуда

$$a_n^2=\frac{4R^2b_n^2}{4R^2+b_n^2} \quad \text{и} \quad a_n=\frac{2Rb_n}{\sqrt{4R^2+b_n^2}},$$

или

$$a_n=\frac{b_nR}{\sqrt{R^2+\frac{b_n^2}{4}}}.$$

Формулы для вычисления a_n и b_n можно привести к следующему виду, разделив числитель и знаменатель на R:

$$a_n=\frac{b_n}{\sqrt{1+\left(\frac{b_n}{2R}\right)^2}} \quad \text{и} \quad b_n=\frac{a_n}{\sqrt{1-\left(\frac{a_n}{2R}\right)^2}}.$$

Эти формулы отличаются друг от друга тем, что в первой в знаменателе под знаком радикала с у м м а, во второй — р а з н о с т ь; кроме того одна формула получается из другой заменой a_n на b_n и, наоборот, при непременном учете требуемого для той или иной формулы знака под радикалом в знаменателе.

Чтобы запомнить, в каком случае следует взять в знаменателе под радикалом знак $+$ или $-$, необходимо помнить, что $b_n > a_n$, а потому,

когда b_n выражено через a_n, знаменатель правой части должен быть правильной дробью, т. е. быть меньше 1; последнее же возможно только тогда, когда под знаком радикала в знаменателе стоит разность: $1-\left(\frac{a_n}{2R}\right)^2$.

Справедливость полученных формул следует проверить на ряде частных случаев. Так, например, можно вычислить b_4 по данному $a_4=R\sqrt{2}$. Получается $b_4=2R$; формула верна.

4. После того как построены правильные вписанные треугольники, четырехугольники и шестиугольники, естественно возникает вопрос, нельзя ли построить с помощью циркуля и линейки правильные многоугольники, число сторон которых равно 5, 7, 8, 9, 10, 11 и т. д.

Для ответа на этот вопрос следует сперва остановиться на построении вписанных в данную окружность радиуса R правильных многоугольников, число сторон которых вдвое больше числа сторон многоугольников, которые учащиеся умеют строить и стороны которых уже вычислены. Показывается, как вычислить длину стороны многоугольников с числом сторон, равным 8, 16, 32, 64 и т. д., 12, 24, 48, 96 и т. д., и дается „формула удвоения" числа сторон n-угольника:

$$a_{2n}=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a_n^2}{4}}},$$

или

$$a_{2n}=R\sqrt{2-2\sqrt{1-\frac{a_n^2}{4R^2}}}=R\sqrt{2-\sqrt{4-\frac{a_n^2}{R^2}}}.$$

Эта формула позволяет вычислить a_{2n} по данным a_n и R. Так,

$$a_8=R\sqrt{2-2\sqrt{1-\frac{a_n^2}{4R^2}}}=R\sqrt{2-2\sqrt{1-\frac{2R^2}{4R^2}}}=$$

$$=R\sqrt{2-2\sqrt{\frac{1}{2}}}=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

или

$$a_{12}=R\sqrt{2-2\sqrt{1-\frac{a_6^2}{4R^2}}}=R\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

Если учащиеся знакомы с преобразованием сложного радикала вида

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}},$$

то выражение для a_{12} можно преобразовать в такое:

$$a_{12}=\frac{R(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2};$$

если же они с указанным выше преобразованием не знакомы, то все же следует дать им формулу a_{12} в форме, записанной выше, предложив им убедиться в справедливости равенства

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},$$

проверив, что действительно

$$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{6+2-4\sqrt{3}}{4}=2-\sqrt{3}.$$

На основе проработанного материала заключаем, что можно построить элементарными средствами, т. е. с помощью циркуля и линейки, правильные вписанные, а следовательно и описанные, многоугольники с числом сторон, равным

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ \dots \text{ и вообще } 3\cdot 2^n,$$

$$4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \dots \text{ и вообще } 4\cdot 2^n,$$

где n — любое целое число натурального ряда.

5. После применения на примерах формулы удвоения можно перейти к решению следующей задачи:

Вписать в окружность данного радиуса правильный десятиугольник и вычислить его сторону через радиус окружности.

Анализ. Пусть AOB (рис. 415) — определяющий треугольник правильного десятиугольника; $AB=a_{10}$, $OA=R$ и $\angle AOB=\frac{360°}{10}=36°$.

Треугольник AOB — равнобедренный, и каждый из его углов при основании равен 72°. Проводим биссектрису AK угла при основании, получаем треугольники AKB и AKO; они равнобедренные и $AB=AK=KO=a_{10}$.

На основании свойства биссектрисы треугольника имеем:

$$\frac{BK}{OK}=\frac{AB}{AO} \quad \text{или} \quad \frac{R-a_{10}}{a_{10}}=\frac{a_{10}}{R}$$

или

$$R:a_{10}=a_{10}:(R-a_{10}),$$

т. е. радиус $R=OB$ в точке K разделен „в среднем и крайнем отношении", т. е. точкой K определяется „золотое деление" радиуса R, и a_{10} есть „золотой отрезок" радиуса. Таково указание, как найти построением сторону правильного вписанного в данную окружность десятиугольника.

Построение. Пусть дана окружность радиуса R (рис. 416). Построим два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD, а затем на радиусе OC как на диаметре — окружность. Соединив точку A с центром малой окружности O_1, получаем, что AD — сторона правильного десятиугольника a_{10}.

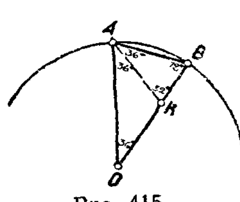


Рис. 415.

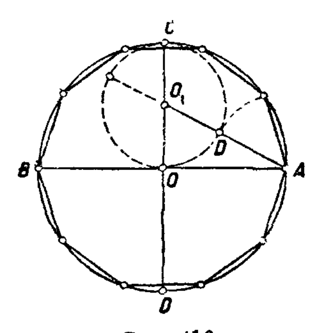


Рис. 416.

Доказательство. Пусть $AD=x$, тогда $(x+R)x=R^2$, или $x^2+Rx=R^2$, или $x^2=R^2-Rx=R(R-x)$, откуда $R:x=x:(R-x)$, т. е. x — „золотой отрезок" радиуса и $x=a_{10}$.

Исследование. Задача всегда возможна.

Определяя x из равенства $x^2+Rx=R^2$, имеем:

$$x^2+Rx-R^2=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{-R\pm\sqrt{R^2+4R^2}}{2}=\frac{-R\pm R\sqrt{5}}{2}=R\cdot\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2},$$

$$x_1=R\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{и} \quad x_2=R\frac{-\sqrt{5}-1}{2}.$$

Отбрасывая второй — отрицательный — корень, имеем:

$$a_{10}=R\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

6. По формуле $a_{2n}=R\sqrt{2-2\sqrt{1-\frac{a_n^2}{4R^2}}}$ можно, в свою очередь, по данному a_{10} вычислить, чему равно a_5, выраженное через R:

$$R\frac{\sqrt{5}-1}{2}=R\sqrt{2-2\sqrt{1-\frac{a_5^2}{4R^2}}};$$

$$\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=2-2\sqrt{1-\frac{a_5^2}{4R^2}}; \quad \frac{3-\sqrt{5}}{2}-2=-2\sqrt{1-\frac{a_5^2}{4R^2}};$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}=2\sqrt{1-\frac{a_5^2}{4R^2}}; \quad \frac{6+2\sqrt{5}}{4}=4-\frac{a_5^2}{R^2};$$

$$\frac{a_5^2}{R^2}=\frac{10-2\sqrt{5}}{4} \quad \text{и} \quad \frac{a_5}{R}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2},$$

причем отрицательный корень отброшен; отсюда

$$a_5=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

7. Большинство учебников геометрии придерживается порядка, принятого и в данной книге, а именно — перехода от a_{10} к a_5. Следует, однако, заметить, что Евклид при построении правильного вписанного пятиугольника не пользуется правильным вписанным десятиугольником и даже нигде не упоминает о нем. Построение правильного вписанного пятнугольника приведено у Евклида в его „Началах", в IV книге, предложение 11-е, при этом Евклид строит сперва равнобедренный треугольник с углом при основании, вдвое бо́льшим угла при вершине.

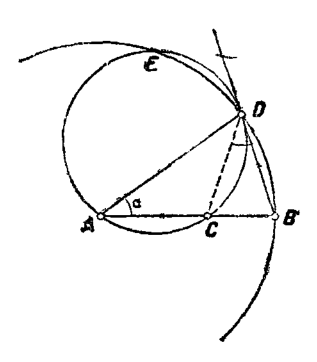


Рис. 417.

Приводим построение, соответствующее построению Евклида, данному им в IV книге, в предложении 10-м.

Возьмем произвольный отрезок AB (рис. 417), разделим его в крайнем и среднем отношении, и пусть $AC^2=AB\cdot BC$. Приняв точку A за центр, проводим радиусом AB окружность BDE и строим хорду $BD=AC$; соединив точку A с точкой D, получим равнобедренный треугольник ABD у которого угол при основании вдвое больше угла при вершине.

Действительно, если соединить точку D с точкой C и провести через точки A, D и C окружность $ACDE$, то хорда BD — касательная к окружности $ACDE$, так как по условию $AC^2 = AB \cdot BC$, по построению же $AC = BD$ и, следовательно, $AC^2 = BD^2$ и $BD^2 = AB \cdot BC$, а потому $\angle BDC = \angle DAC$.

Прибавив к обеим частям последнего равенства по углу CDA, имеем. $\angle BDC + \angle CDA = \angle DAC + \angle CDA$. Но $AD = AB$, следовательно $\angle ADB = \angle ABD$ и $\angle BCD = \angle DAC + \angle CDA$ как внешний угол треугольника DCA, а потому $\angle ADB = \angle ABD = \angle BCD$ и $BD = CD = AC$. Если же $AC = CD$, то $\angle DAC = \angle ADC$ и $\angle BCD = 2\angle DAC$.

Принимая во внимание, что $\angle BCD = \angle ADB = \angle ABD$, заключаем, что и $\angle ADB$ и $\angle ABD$ равны $2\angle DAC$. Итак, в равнобедренном треугольнике ABD каждый из углов при основании в д в о е больше угла при вершине. Если обозначить угол при вершине, $\angle DAB$, через a, то каждый из углов при основании равен $2a$, сумма же всех этих трех углов равна $2d$.

$$a + 2a + 2a = 180^\circ \quad \text{или} \quad 5a = 180^\circ \quad \text{и} \quad a = 36^\circ.$$

Умение построить равнобедренный треугольник, у которого каждый из углов при основании вдвое больше угла при вершине, позволяет решить задачу:

В данный круг вписать правильный пятиугольник.

Р е ш е н и е. Строим равнобедренный треугольник FGH (рис. 418), в котором каждый из углов при основании вдвое больше угла при вершине. Вписываем затем в данный круг O треугольник ACD, подобный построенному треугольнику FGH так, чтобы $\angle A = \angle F = 36^\circ$. Из построения следует, что

$$\angle CAD = \frac{1}{2}\angle ACD = \frac{1}{2}\angle ADC.$$

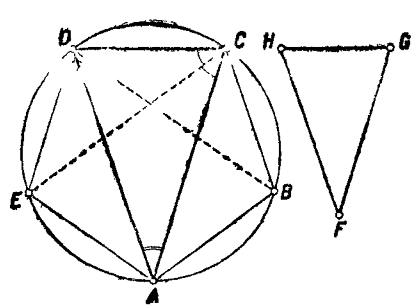


Рис. 418.

После этого следует разделить пополам углы ADC и ACD и продолжить биссектрисы этих углов до пересечения с окружностью в точках B и E и соединить точку B с точками A и C и точку E с точками A и D; полученный таким построением пятиугольник $ABCDE$ — искомый. В самом деле, $\angle CAD = \angle ADB = \angle BDC = \angle ECD = \angle ACE = 36^\circ$, отсюда следует, что $\smile CD = \smile AB = \smile BC = \smile ED = \smile AE$; если же дуги равны, то равны и стягиваемые ими хорды, а потому $CD = AB = BC = ED = AE$, и хорды эти являются сторонами правильного пятиугольника; понятно, что и углы пятиугольника равны, так как каждый из них измеряется половиной дуги в 216° и, следовательно, каждый из углов равен 108°. Итак, пятиугольник $ABCDE$ — правильный.

Удвоением числа сторон правильного пятиугольника получается правильный вписанный десятиугольник.

Итак, можно с помощью конечного числа операций циркулем и линейкой вписать в окружность и описать около нее правильные многоугольники с числом сторон, равным:

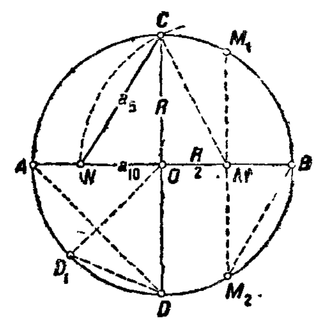


Рис. 419.

$$5,\ 10,\ 20,\ 40,\ \ldots \text{ и вообще } 5\cdot 2^n,$$

где n — любое целое число.

Приводим еще построение стороны правильного вписанного пятиугольника, данное Птоломеем Александрийским (IIв.).

В окружности O следует провести два взаимно перпендикулярных диаметра (рис. 419). Приняв середину M радиуса OB за центр, проводят радиусом MC окружность, пересекающую диаметр AB в точке N; соединив точку N с точкой C, получаем отрезок $CN=a_5$ и отрезок $ON=a_{10}$. Справедливость такого построения нетрудно проверить вычислением.

Из треугольника COM, в котором $OM=\frac{R}{2}$ и $OC=R$, находим: $CM=\frac{R}{2}\sqrt{5}$; но $NO=NM-OM=MC-OM=\frac{R\sqrt{5}}{2}-\frac{R}{2}=$ $=\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)=a_{10}$. Из треугольника CNO, в котором $OC=R$ и $ON=\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$, находим: $NC=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}=a_5$.

Если еще продолжить проведение отдельных линий в данном круге и, проведя через точку M хорду M_1M_2 перпендикулярно к AB. $M_1M_2 \perp AB$, соединить точку M_2 с точкой B, соединить точки A и D и затем, разделив $\angle AOD$ пополам, провести хорду DD_1, то $M_1M_2=a_3$, $BM_2=a_6$, $AD=a_4$, $DD_1=a_8$ и, наконец, $MM_1\approx a_7$, с точностью до $0{,}5\%$.

Вычислим сторону $a_7=AH$ из определяющего треугольника AOH, пользуясь тригонометрией (рис. 420):

$$\angle AOH=\frac{360^\circ}{7}\approx 51^\circ{,}43,$$

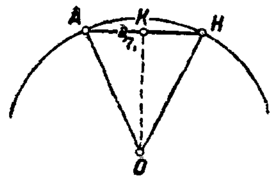


Рис. 420.

а потому

$$\frac{a_7}{2}=R\sin\frac{180^\circ}{7}\approx R\sin 25^\circ{,}71$$

и

$$a_7\approx 2R\sin 25^\circ{,}71\approx 2R\sin 25^\circ 43'.$$

Найдя $\sin 25^\circ 43'$ по таблицам величин синусов, получим:

$$a_7\approx 2R\cdot 0{,}434\approx 0{,}868R\approx 0{,}87R.$$

Если сравнить сторону a_7 с половиной стороны правильного треугольника:

$$\frac{1}{2}a_3=\frac{1}{2}R\sqrt{3}\approx\frac{1}{2}R\cdot 1{,}732\approx 0{,}866R\approx 0{,}87R,$$

то можно заключить, что сторона правильного вписанного семиугольника приближенно равна половине стороны правильного вписанного треугольника. Этим приближенным равенством следует пользоваться для быстрого построения стороны a_7, если точность требуется не выше $0{,}5\%$.

8. Следует указать, что, умея делить окружность на 10 равных частей и на 6 равных частей, мы имеем возможность делить окружность циркулем и линейкой на 15 равных частей. Действительно, $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$, а потому можно вписать в данную окружность правильные многоугольники с числом сторон, равным

$$15,\ 30,\ 60,\ 120,\ \ldots \text{ и вообще } 15\cdot 2^n,$$

где n — любое целое число натурального ряда.

Прием, который был использован выше, наводит на мысль, нельзя ли еще построить правильные многоугольники с иным числом сторон, кроме уже указанных, не найдем ли мы указаний, рассматривая разность основных дробей, знаменатели которых представляют собою число сторон многоугольников, которые мы можем построить. Под основной дробью мы понимаем дробь, числитель которой — единица. Если использовать основные дроби, то необходимо также, чтобы разность их была основной дробью. Так, например, имеем:

$$\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{30};\quad \frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20};\quad \frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24};\quad \frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

Если знаменатели дробей соответствуют числу сторон правильного многоугольника, то, как известно, можно построить многоугольники с числом сторон 30, 20, 24 и 12.

Один из величайших математиков своего времени Гаусс доказал, что с помощью циркуля и линейки можно построить такие правильные многоугольники, число сторон которых $n=2^{2^k}+1$, причем n — число первоначальное, а k — любое целое число натурального ряда. Так, для $k=0$ имеем $n=3$; для $k=1$ имеем $n=5$; для $k=2$ получаем $n=17$, для $k=3$ получаем $n=257$, при $k=4$ имеем $n=65\,537$. Гаусс дал построение правильного вписанного семнадцатиугольника. Но уже при $k=5$ число $n=4\,294\,967\,297=641\cdot 6\,700\,417$ — число не первоначальное, а составное, и, таким образом, нельзя построить с помощью циркуля и линейки правильный многоугольник с таким числом сторон. До настоящего времени установлено, что для n не получаются первоначальные числа и при $k=6$, 9, 11, 12, 18, 23, 36 и 38.

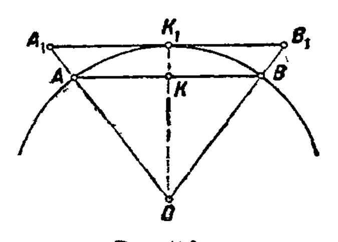


Рис. 420а.

9. Если учащиеся знакомы с тригонометрией, то, ограничившись построением только a_3, a_4 и a_6, а также b_3 и b_4, можно вывести формулу для вычисления сторон a_n или b_n через R окружности описанной или вписанной, пользуясь определяющим треугольником, как это было сделано при вычислении стороны семиугольника. Вывод соответствующих формул следует провести на уроках тригонометрии.

Пусть AOB (рис. 420а) — определяющий треугольник правильного n-угольника, и тогда $AB=a_n$, $\angle AOB=\frac{360^\circ}{n}$ и $\angle AOK=\frac{180^\circ}{n}$. Из треугольника AOK находим:

$$AK=\frac{a_n}{2}=R\sin\frac{180^\circ}{n},\quad \text{откуда}\quad a_n=2R\sin\frac{180^\circ}{n}.$$

Если взять $n=3$, 4, 6, то получаем:

$$a_3=2R\sin 60^\circ=R\sqrt{3},\quad a_4=2R\sin 45^\circ=R\sqrt{2},\quad a_6=2R\sin 30^\circ=R.$$

Если пользоваться тригонометрией, то нет надобности и в особой формуле для a_{2n}, так как a_{2n} может быть вычислена по приведенной выше формуле:

$$a_{2n} = 2R \sin \frac{180^\circ}{2n} = 2R \sin \frac{90^\circ}{n}.$$

Точно так же имеем для описанного правильного n-угольника из его определяющего треугольника A_1OB_1, что $\angle A_1OB_1 = \frac{360^\circ}{n}$, $\angle K_1OB_1 = \frac{180^\circ}{n}$, $OK_1 = R$ и $K_1B_1 = \frac{b_n}{2}$.

Из треугольника K_1OB_1 находим:

$$K_1B_1 = \frac{b_n}{2} = R \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}, \quad \text{откуда} \quad b_n = 2R \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

Если взять $n = 3$ или 4, то получаем:

$$b_3 = 2R \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{3} = 2R \operatorname{tg} 60^\circ = 2R\sqrt{3},$$

$$b_4 = 2R \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{4} = 2R \operatorname{tg} 45^\circ = 2R.$$

Если, наконец, определить отношение $b_n : a_n$, то имеем:

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{2R \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}{2R \sin \frac{180^\circ}{n}} = \frac{1}{\cos \frac{180^\circ}{n}},$$

откуда

$$a_n = b_n \cos \frac{180^\circ}{n} \quad \text{и} \quad b_n = a_n \sec \frac{180^\circ}{n}.$$

Для $n = 3$ имеем: $a_3 = b_3 \cos 60^\circ$, или $a_3 = \frac{b_3}{2}$.

Для $n = 4$ имеем: $a_4 = b_4 \cos 45^\circ$ или $a_4 = \frac{b_4\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2}$, так как $b_4 = 2R$.

Формулы эти позволяют вычислить сторону любого правильного многоугольника, а следовательно и его периметр:

$$P_{bn} = a_n n \quad \text{и} \quad P_{on} = b_n n.$$

Если учащиеся знакомы с формулой для вычисления площади треугольника по двум сторонам и углу между ними:

$$S_\Delta = \frac{ab \sin C}{2},$$

то по ней весьма просто вычисляется площадь правильного вписанного многоугольника.

В самом деле, площадь S определяющего треугольника AOB равна

$$\frac{R \cdot R \sin \frac{360^\circ}{n}}{2} = \frac{R^2}{2} \sin \frac{360^\circ}{n}$$

и площадь правильного вписанного n-угольника —

$$S_n = \frac{nR^2}{2} \sin \frac{360^\circ}{n} \text{ (кв. ед.)}.$$

Так, для $n = 3$, 4, 6, 12 имеем:

$$S_3 = \frac{3R^2}{2} \sin 120^\circ = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}; \quad S_4 = \frac{4R^2}{2} \sin 90^\circ = 2R^2;$$

$$S_6 = \frac{6R^2}{2} \sin 60^\circ = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}; \quad S_{12} = \frac{12R^2}{2} \sin 30^\circ = 3R^2.$$

10. Следует показать учащимся прием вычисления площади правильного вписанного n-угольника, не прибегая к тригонометрии. Рассмотрим вычисление площади правильного вписанного n-угольника для $n=8$ и $n=12$.

Пусть $AB=BC=a_{12}$ (рис. 421), тогда $AC=a_6=R$, и площадь определяющего треугольника AOB равна $\frac{1}{2}BO\cdot AK=\frac{1}{2}R\cdot\frac{R}{2}=\frac{R^2}{4}$, и площадь правильного двенадцатиугольника

$$S_{12}=\frac{R^2}{4}\cdot 12=3R^2 \text{ (кв. ед.)}.$$

Если $AB=BC=a_8$, то $AC=a_4=R\sqrt{2}$, и площадь определяющего треугольника равна:

$$\frac{1}{2}BO\cdot CK=\frac{1}{2}R\cdot\frac{R\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{4}R^2\sqrt{2},$$

и

$$S_8=8\cdot\frac{1}{4}R^2\sqrt{2}=2R^2\sqrt{2} \text{ (кв. ед.)}.$$

Рис. 421.

Итак, площадь правильного n-угольника может быть весьма просто определена, если известна сторона правильного многоугольника, число сторон которого вдвое меньше. Так, зная, что сторона $a_8=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, находим:

$$S_{16}=16\cdot\frac{1}{2}R\cdot\frac{R\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}=16\cdot\frac{R^2}{4}\sqrt{2-\sqrt{2}}=4R^2\sqrt{2-\sqrt{2}} \text{ (кв. ед.)}.$$

Или если $a_{12}=R\sqrt{2-\sqrt{3}}$, то

$$S_{24}=24\cdot\frac{1}{2}R\frac{R\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=24\cdot\frac{R^2}{4}\sqrt{2-\sqrt{3}}=6R^2\sqrt{2-\sqrt{3}},$$

и вообще

$$S_{2n}=2n\cdot\frac{1}{2}R\cdot\frac{a_n}{2}=\frac{nRa_n}{2} \text{ (кв. ед.)}.$$

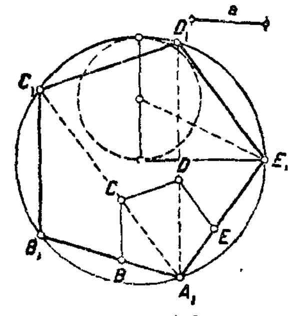


Рис. 422.

11. Следует показать, как решаются задачи, подобные следующей:

По данной стороне a правильного пятиугольника построить самый пятиугольник.

Построение. Впишем в окружность радиуса произвольной длины правильный пятиугольник (рис. 422).

Пусть a — данная сторона искомого пятиугольника; отложим ее на стороне A_1B_1 построенного пятиугольника от вершины A_1 и проведем из той же вершины A_1 диагонали пятиугольника. Проведя затем $BC \parallel B_1C_1$ до пересечения с диагональю A_1C_1 и $CD \parallel C_1D_1$ до пересечения с диагональю A_1D_1 и, наконец, $DE \parallel D_1E_1$ до пересечения со стороною A_1E_1, получим пятиугольник A_1BCDE, подобный ранее построенному и, следовательно, правильный.

Метод, примененный при решении этой задачи, применим к построению любого правильного многоугольника, сторона которого, на основании предыдущих рассуждений, может быть вычислена и построена. В правильных многоугольниках, с которыми имеют дело в средней школе, число сторон равно одному из членов кратной прогрессии, постоянное q которой равно 2, а первый член $u_1 = 3$, или 4, или 5, или 15.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. При каком условии треугольник правильный?

2. При каком условии многоугольник правильный?

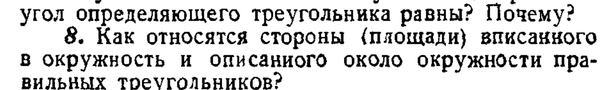
3. Что больше: a_6 или a_{12}? a_6 или b_6? a_{12} или b_{12}?

4. Из каких одинаковых плит, имеющих форму правильных многоугольников, можно составить паркетный пол?

5. Какие свойства симметрии имеют правильные многоугольники?

6. Почему два правильных одноименных многоугольника всегда подобны?

7. В каком правильном многоугольнике внешний его угол и центральный угол определяющего треугольника равны? Почему?



8. Как относятся стороны (площади) вписанного в окружность и описанного около окружности правильных треугольников?

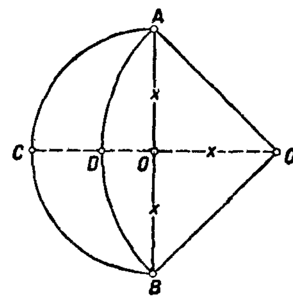


Рис. 423.

9. В правильном пятиугольнике пересекающиеся диагонали делятся взаимно в золотом делении. Доказать.

10. По данной стороне a правильного восьмиугольника построить самый восьмиугольник.

11. Сторона правильного пятиугольника равна 2 *м*. Найти его диагональ.

12. Стороны правильного пятиугольника продолжены до их взаимного пересечения. Определить периметр полученной правильной пятиугольной звезды, если известно, что сторона пятиугольника равна 1 *м*.

13. $\smile ADB = 90^\circ$ (рис. 423); $\smile ACB = 180^\circ$, $CD = 1$ *м*. Найти AB.

14. Стороны трех правильных восьмиугольников равны 3, 4 и 12 *м*. Найти длину стороны правильного восьмиугольника, площадь которого равна сумме площадей данных трех восьмиугольников.

Указания к контрольным вопросам.

Первые восемь вопросов, кроме 4-го, могут быть заданы для устного ответа; в этих вопросах учащиеся должны хорошо разбираться. Ответы на них следующие:

1 Или стороны должны быть равны или углы должны быть равны.

2. И стороны должны быть равны и углы должны быть равны.

3. $a_6 > a_{12}$, так как в треугольнике со сторонами a_6, a_n и a_{12} сторона a_6 лежит против тупого угла.

$a_6 < b_6$, ибо $6a_6 < 6b_6$, так как периметр объемлемой ломаной меньше периметра объемлющей; или из треугольника ABC (рис. 424):

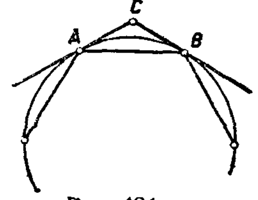


Рис. 424.

$$AB < CA + CB, \text{ т. е. } a_6 < \frac{b_6}{2} + \frac{b_6}{2}, \text{ т. е. } a_6 < b_6.$$

$a_n < b_n$ на том же основании.

4. Каждый угол правильного n-угольника равен $180^\circ\left(1 - \frac{2}{n}\right)$. Если требуется покрыть всю плоскость одноименными правильными многоугольниками, то необходимо, чтобы: 1) углы их при одной вершине были прилежащими и 2) сумма углов, имеющих общую вершину, равнялась 360°.

Пусть x — число многоугольников; тогда

$$180^\circ\left(1-\frac{2}{n}\right)x=360^\circ,$$

откуда

$$\left(1-\frac{2}{n}\right)x=2 \quad \text{и} \quad x=\frac{2n}{n-2}=2+\frac{4}{n-2}.$$

Во-первых, $n>2$ и, во-вторых, для $n>6$ дробь $\frac{4}{n-2}<1$. Подставляя вместо n числа 3, 4, 5 и 6, находим, что только числа 3, 4 и 6 удовлетворяют условию, ибо x должно быть целым числом.

5. Правильные многоугольники с нечетным числом сторон не имеют центра симметрии; они имеют оси симметрии; последних столько, сколько сторон у многоугольника. Осями симметрии служат биссектрисы углов или медиатрисы сторон правильного многоугольника.

Правильные многоугольники с четным числом ($2n$) сторон имеют центр симметрии и $2n$ осей симметрии: n биссектрис и n медиатрис.

6. Так как углы их равны и стороны пропорциональны.

7. Во всяком, так как каждый из углов равен $\frac{360^\circ}{n}$.

8. Стороны относятся, как 1:2, площади — как 1:4.

9. $\angle ABC=180^\circ\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{180^\circ\cdot 3}{5}=108^\circ$ (рис. 425); $\angle CEK=\angle KEA=\angle DEC=36^\circ$. Прямая EK — биссектриса угла AEC треугольника AEC. Если $CE=m$, то из треугольника AEC имеем: $m:a=a:(m-a)$, что и требовалось доказать.

10. Решается так же, как аналогичная задача, данная в тексте (стр. 279).

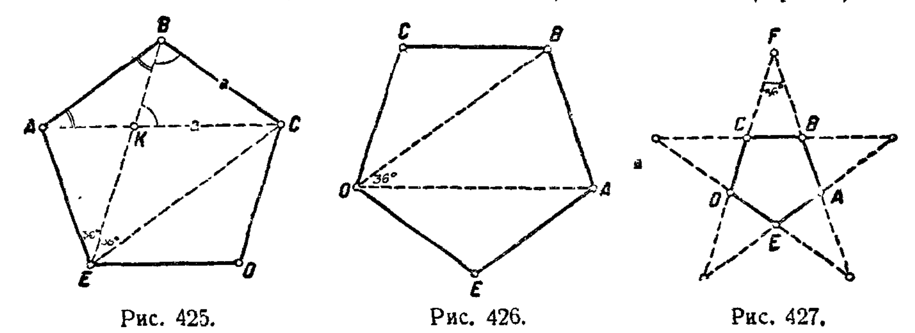


Рис. 425. Рис. 426. Рис. 427.

11. $AB=\frac{AD}{2}(\sqrt{5}-1)$ (рис. 426), так как AB — сторона правильного десятиугольника, вписанного в окружность радиуса DA. Значит,

$$2=\frac{AD}{2}(\sqrt{5}-1) \quad \text{и} \quad AD=\frac{4}{\sqrt{5}-1}=\frac{4(\sqrt{5}+1)}{4}=(\sqrt{5}+1)\text{ м}.$$

12. Из треугольника BCF имеем: $CB=\frac{FC}{2}(\sqrt{5}-1)$ (рис. 427),

$$FC=\frac{2\cdot 1}{\sqrt{5}-1}=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{4}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\text{ м} \quad \text{и} \quad P=10\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}=5(\sqrt{5}+1)\text{ м}.$$

13. Пусть $AB=2x$, тогда $AO=x=OB=OO_1=OC$; $DO_1=AO_1=x\sqrt{2}$ и $CD+DO_1=CO+OO_1$, т. е. $1+x\sqrt{2}=x+x$.

Значит, $x=\frac{1}{2-\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ и $2x=(2+\sqrt{2})$ м.

14. Обозначив площади восьмиугольников через S_1, S_2, S_3 и S_4 и их стороны соответственно через 3, 4, 12 и x метров, имеем:

$$\frac{S_1}{9}=\frac{S_2}{16}=\frac{S_3}{144}=\frac{S_4}{x^2} \quad \text{или} \quad \frac{S_1+S_2+S_3}{9+16+144}=\frac{S_4}{x^2},$$

но $S_1+S_2+S_3=S_4$, и потому $9+16+144=x^2$ и $x=\sqrt{169}=13$ *м.*

§ 20. Основные вопросы теории бесконечно малых и пределов.

1. Одна из трудных и в то же время одна из замечательных проблем элементарного курса геометрии — это проблема о спрямлении (ректификации) окружности и о вычислении площади круга (квадратура круга), имеющая более чем четырехтысячелетнюю давность. Лишь во второй половине XIX в. удалось научно обосновать проблему квадратур и ректификаций фигур криволинейного контура.

Оказалось недостаточно аппарата бесконечно малых и пределов; потребовалось создать тонкий инструмент — теорию непрерывности.

К сожалению, нам не придется рассматривать современное обоснование методов квадратур и ректификаций фигур с криволинейным контуром; интересующихся отсылаем к книгам: 1) В. Каган, Основания геометрии, 2) Вебер и Вельштейн, Энциклопедия элементарной математики, 3) Ф. Энриквес, Вопросы элементарной геометрии.

Не останавливаемся мы на строго научном обосновании вопроса и потому, что средняя школа, учитывая общее развитие и подготовку учащихся, не может поставить вполне научное изложение вопроса об измерении величин геометрических фигур с криволинейным контуром.

Необходимо указать, что редко в каком-либо другом месте элементарного курса геометрии имеется такое расхождение между минимальной и максимальной научностью изложения рассматриваемого вопроса.

Имеются курсы, как, например, Н. Извольского „Геометрия на плоскости", в которых вопрос не обосновывается даже теорией бесконечно малого, в которых круг рассматривается как многоугольник с бесконечно большим числом сторон, и имеются курсы, как, например, С. Богомолова „Основания геометрии", в которых не удовлетворяются теорией бесконечно малого и пределов и рассмотрение вопроса обосновывается теорией непрерывности.

Мы дадим два изложения, одно — более строгое, однако не претендующее на полную высоту научного изложения вопроса, как недоступную для средней школы, и второе — менее строгое; первое потребует изложения теории бесконечно малого и пределов, второе ограничится основным интуитивным пониманием бесконечно малого и предела.

2. Решение отдельных вопросов геометрии, как-то: нахождение длины окружности, площади круга, объема пирамиды и круглых тел, требует знания теории пределов.

Углубленное изучение теории пределов — дело высшей школы. В средней школе следует дать только общее понятие о величинах постоянных и переменных, о бесконечно больших и бесконечно малых переменных и о пределе переменных величин; при этом нужно остановиться на отдельных теоремах, относящихся к выяснению свойств переменных и их пределов лишь постольку, поскольку это необходимо для обоснования

некоторых теоретических выводов. Вместе с тем надо помнить, что выяснение понятий как о постоянных и переменных величинах, так и о пределе последних должно быть дано на ряде конкретных примеров, четко поясняющих существо вопроса.

3. Прежде всего следует разъяснить учащимся, что громадное большинство наблюдаемых и измеряемых нами величин так или иначе изменяется, а потому и называется переменными величинами. Так, длина железного стержня изменяется в зависимости от температуры; высота и обхват дерева непрерывно изменяются с течением времени; путь, проходимый телом при одной и той же скорости в единицу времени, изменяется в зависимости от продолжительности движения тела и т. д. Вместе с тем, учащимся указывается, что наряду с переменными величинами математика рассматривает величины, которые при любых условиях остаются постоянными. Так, сумма углов треугольника равна $2d$ при любой длине его сторон и при любой величине отдельных его углов, а потому является величиной постоянной; также постоянной величиной является сумма внешних углов любого выпуклого n-угольника; эта сумма равна $4d$ при любом числе n сторон многоугольника и при любой величине отдельных его углов; диаметр данного круга — величина постоянная: он сохраняет одну и ту же величину при любом своем положении в круге, хорда, наоборот, — величина переменная: ее величина изменяется с изменением ее положения в круге; с другой стороны, произведение отрезков хорд, проходящих через одну и ту же точку внутри круга, — величина постоянная для всех хорд, проходящих через эту точку.

Следует также упомянуть и о том, что некоторые, вообще говоря, переменные величины в условиях определенного вопроса могут рассматриваться как постоянные. Так, радиус есть величина, которая может принимать всевозможные значения, радиус же данного круга есть величина не изменяющаяся, величина постоянная. Другой пример: рассматривая данное равномерное движение, выражаемое формулой $s = vt$, мы считаем скорость v для данного движения величиной постоянной, величины же s, путь, и t, время, — переменными. Таким образом, постоянные величины разделяются на абсолютно постоянные величины и постоянные величины при определенных условиях: первые из них иногда называют константами, а вторые — параметрами.

4. Следует дать определения постоянной и переменной величин. Постоянной *называется величина, которая в условиях данного вопроса не изменяется и, следовательно, сохраняет, одно и то же значение.* Переменной *называется величина, которая, изменяясь в условиях данного вопроса, принимает различные значения.*

Для закрепления понятий о постоянных и переменных величинах следует рассмотреть несколько примеров.

Примеры: 1) Путь, проходимый падающим телом, вычисляется по формуле $s = \frac{1}{2} gt^2$; данная формула выражает зависимость между тремя величинами; из них s, длина пути, и t, время движения тела, — величины переменные, g, ускорение движения на определенной широте земной поверхности, — величина постоянная.

2) Дан произвольной формы треугольник ABC (рис. 428), вершина C которого перемещается по прямой, параллельной основанию AB треуголь-

ника. Рассмотрение отдельных случаев, когда вершина треугольника C находится в точках C, C_1, $C_2, \ldots$, должно показать учащимся, что длина боковых сторон и периметр треугольника, а также величина его внутренних и внешних углов — величины переменные, сумма же его внутренних, а также внешних углов, основание $AB = a$ и высота h треугольника, а также его площадь при данных условиях — величины постоянные.

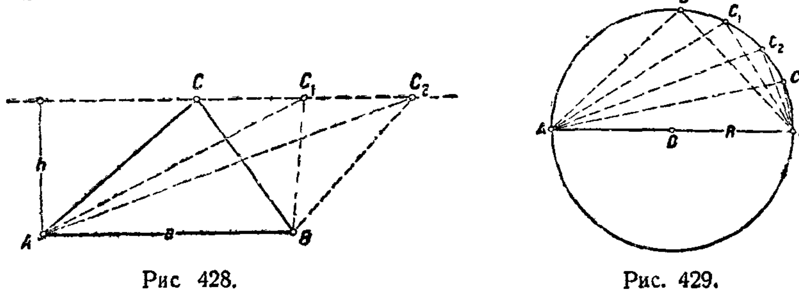


Рис 428. Рис. 429.

3) В круге радиуса R проведен диаметр AB (рис. 429); концы его A и B соединены с различными точками окружности. Понятно, что хорды AC, AC_1, $AC_2, \ldots$, BC, BC_1, $BC_2, \ldots$, — величины переменные, сумма же квадратов каждых двух хорд, выходящих из одной точки и проведенных к концам одного и того же диаметра, — величина постоянная и равна квадрату диаметра данного круга. Постоянными являются также медианы CO, $C_1O, \ldots$ и вписанные углы C, $C_1, \ldots$; переменными — площади треугольников, образуемых перемещением вершины C по окружности, углы A и B и т. д.

Следует предложить учащимся привести примеры вопросов, решение которых связано с рассмотрением постоянных и переменных величин.

Существенная сторона рассмотрения отдельных вопросов, в которые входят переменные велнчины, заключается в том, чтобы учащиеся четко уяснили себе самый процесс изменения переменной величины в зависимости от произвольного изменения тех величин, от которых они зависят.

4) Пусть даны дроби: $y = \frac{x}{x+1}$ и $z = \frac{x+1}{x}$, где x может принимать ряд положительных значений, например: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 3, 4, 5, ...

Если взять правильную дробь $y = \frac{x}{x+1}$, то при условии, что x пробегает заданные выше значения, y соответственно будет равен: $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, ...; неправильная же дробь $z = \frac{x+1}{x}$ при соблюдении тех же условий будет равна: 5, 3, 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$, ...

С помощью соответственно поставленных наводящих вопросов учащиеся должны уяснить себе, что переменные величины, постепенно изменяясь, возрастают или, наоборот, убывают.

Следует также указать учащимся, что имеются переменные величины, которые, изменяясь, то возрастают, то убывают. В качестве примера можно рассмотреть сумму n членов бесконечно убывающей кратной прогрессии,

положим $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}-\ldots$, где $a_1=1$ и $q=-\frac{1}{3}$. Находят сумму S_n ее первых n членов по формуле $S_n=\frac{1-q^n}{1-q}$.

$$S_n=\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=$$
$$=\frac{3}{4}-\left(-1\right)^n\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3^n}.$$

Давая n значения 1, 2, 3, 4, 5, ..., имеем:

$$S_1=1;\ S_2=\frac{2}{3};\ S_3=\frac{7}{9};\ S_4=\frac{20}{27};\ S_5=\frac{61}{81},\ \ldots$$

или

$$S_1=1;\ S_2=\frac{54}{81};\ S_3=\frac{63}{81};\ S_4=\frac{60}{81};\ S_5=\frac{61}{81},\ \ldots$$

Сопоставляя S_3, S_4 и S_5, мы видим, что сумма первых n членов данной бесконечно убывающей прогрессии в зависимости от численного значения n то убывает, то возрастает. Когда это понято учащимися, можно перейти к выяснению понятия п р е д е л а.

5. Рассмотрение предложенных выше примеров должно разъяснить учащимся, что в первом случае, по мере того как значение x, будучи положительным, возрастает, величина дроби $y=\frac{x}{x+1}$ изменяется и возрастает и при этом все более и более приближается к единице, и что, наоборот, во втором случае величина дроби $z=\frac{x+1}{x}$ по мере увеличения значения x убывает и, так же как и дробь $y=\frac{x}{x+1}$, все более и более приближается к единице.

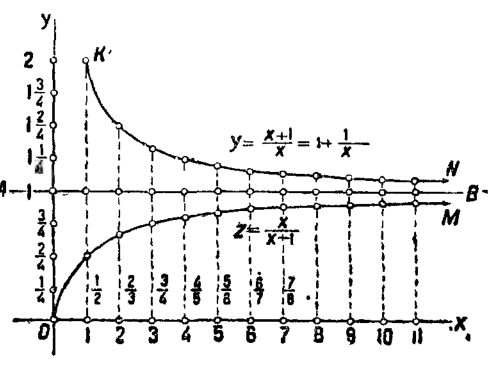


Рис. 430.

Ход изменения обеих дробей может быть дан графически. Ход изменения дроби $\frac{x}{x+1}$ представляет собою кривую OM (рис. 430); дробь $\frac{x}{x+1}$ по мере возрастания x увеличивается, и ее значение приближается к 1; на рисунке уравнению $y=1$ соответствует прямая AB. График изменения дроби $\frac{x+1}{x}$ — кривая KN; дробь $\frac{x+1}{x}$ по мере возрастания x уменьшается и также приближается к 1. Всегда можно подобрать такое значение x, при котором $y-1$ по своей абсолютной величине будет меньше какого угодно наперед заданного малого числа a.

Так, пусть $a=0{,}000001$, тогда по условию

$$1-\frac{x}{x+1}<0{,}000001,$$

откуда

$$\frac{x+1-x}{x+1} < 0{,}000001 \quad \text{или} \quad \frac{1}{x+1} < 0{,}000001,$$

но x — число положительное, а потому

$$\frac{x+1}{1} > 1\,000\,000,$$

следовательно

$$x+1 > 1\,000\,000 \quad \text{и} \quad x > 999\,999,$$

т. е. при $x > 999\,999$ дробь y будет отличаться от 1 меньше, чем на 0,000001, и останется меньшей при дальнейшем увеличении x.

Следует привести учащимся ряд примеров из геометрии. Так, в окружности переменная величина — длина хорды — по мере приближения хорды к диаметру становится все больше и больше и, сливаясь с последним, достигает своей наибольшей величины, а затем, удаляясь от центра, становится все меньше и меньше, пока не станет равной нулю.

Точно так же длина секущей, по мере того как две ее точки пересечения с окружностью сближаются, приближается беспредельно к длине касательной, когда точки пересечения касательной с окружностью совпадут.

Дробь 0,9999... по мере увеличения числа десятичных знаков также неограниченно приближается к 1, почему 1 служит пределом дроби 0,9999... Важно показать учащимся, что, рассматривая бесконечный ряд чисел: 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999;..., мы видим, что числа этого ряда, возрастая, приближаются к единице и что каждый член ряда, по мере удаления от начала ряда, отличается от единицы на все меньшую величину. Действительно:

$$1-0{,}9 = 0{,}1, \quad \text{или} \quad 10^{-1},$$
$$1-0{,}99 = 0{,}01, \quad \text{или} \quad 10^{-2}.$$
$$1-0{,}999 = 0{,}001, \quad \text{или} \quad 10^{-3}, \text{ и т. д.}$$

Другими словами, члены ряда приближаются к единице так, что разность между членом ряда и единицей может быть сделана сколь угодно малой.

Указывается, что в данном примере бесконечная десятичная дробь 0,99... — величина переменная, которая по мере увеличения числа десятичных знаков приближается к единице — величине постоянной.

Отмечается, что переменные величины, имеющие предел, могут приближаться к пределу, или возрастая, или убывая, или колеблясь около своего предела, то возрастая, то убывая. В последнем примере переменная 0,99... приближается к своему пределу, равному единице, возрастая.

В приведенном выше примере бесконечно убывающей кратной (геометрической) прогрессии: $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\dots$ сумма при неограниченном возрастании числа членов n становится переменной величиной, пределом которой, как видно из формулы $S_n=\frac{3}{4}-(-1)^n\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3^n}$ на стр. 285, является правильная дробь $\frac{3}{4}$; одновременно, однако, видно, что: 1) $S_n<\frac{3}{4}$, если число взятых n первых членов — число четное, и

2) $S_n > \frac{3}{4}$, если число членов n — число нечетное, так как в первом случае при нахождении S_n из $\frac{3}{4}$ вычитается положительное число $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5^n}$, во втором случае оно прибавляется.

Таким образом, взяв первые два, три, четыре, пять и т. д. членов данной бесконечно убывающей кратной прогрессии, находим, что получаемые суммы соответственно то больше, то меньше $\frac{3}{4}$, т. е. предела, к которому приближается сумма n членов данной бесконечно убывающей кратной прогрессии, если число членов n неограниченно возрастает.

6. Дается определение предела переменной величины.

Пределом переменной величины x называется такая постоянная величина a, к которой переменная приближается так, что абсолютная величина разности $x - a$ может быть сделана и при дальнейшем изменении переменной оставаться менее любого сколь угодно малого положительного числа.

Следует рассмотреть пример:

Определить, чему равен каждый из внутренних углов правильного n-угольника, если число сторон многоугольника беспредельно возрастает.

Известно, что сумма внутренних углов n-угольника равна $2d(n-2)$; если обозначить через y величину внутреннего угла правильного n-угольника, выраженного через прямой угол как единицу измерения или через x в градусной мере, то получим, что

$$y = \frac{2d(n-2)}{n} = \frac{2dn}{n} - \frac{4d}{n} = 2d - \frac{4d}{n} \quad \text{или} \quad x = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}.$$

Следует рассмотреть, как изменяется x, если увеличивать число n, давая ему ряд безгранично возрастающих значений; $n = 3, 4, 5 \ldots$

При $n = 3$ получим, что $x = 60^\circ$,
„ $n = 4$ „ „ $x = 90^\circ$,
„ $n = 5$ „ „ $x = 108^\circ$,
„ $n = 6$ „ „ $x = 120^\circ$,
. . . .
„ $n = 10$ „ „ $x = 144^\circ$,
. . . .
„ $n = 360$ „ „ $x = 179^\circ$,
. . . .

Значения x, как это видно из таблицы, возрастают по мере увеличения числа n сторон многоугольника, приближаясь к 180° и все же оставаясь все время меньше 180°, так как $x = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$.

Если сделать $n = 360 \cdot 60 = 21\,600$, то тогда

$$x = 180^\circ - \frac{360^\circ}{360 \cdot 60} = 180^\circ - 1' = 179^\circ 59'.$$

В последнем случае разность между постоянной величиной 180° и переменной величиной x равна $1'$, однако разность $180^\circ - x$ может

быть сделана и меньше $1'$, если число n многоугольника взять больше 21 600.

Так, если $n = 360 \cdot 60 \cdot 60 = 1\,296\,000$, то

$$x = 180^\circ - \frac{360^\circ}{360 \cdot 60 \cdot 60} = 180^\circ - 1'' = 179^\circ 59' 59''.$$

Понятно, что в данном случае разность $180^\circ - x = 1''$; и все же эта разность может быть сделана менее $1''$, если продолжать увеличение числа n сторон многоугольника. Следует указать учащимся, что величина разности между постоянной величиной и переменной также все время изменяется, а потому сама является величиной переменной; ее характерная особенность состоит в том, что она по мере беспредельного возрастания числа n сторон многоугольника становится все меньше и меньше, может быть сделана и при дальнейшем процессе изменения оставаться менее любой наперед заданной величины.

Поясняется, что такая все уменьшающаяся переменная называется бесконечно малой переменной и что пределом такой переменной служит нуль.

Дается определение: *если абсолютное значение переменной x может быть сделано меньше любого наперед произвольно заданного положительного числа N и остается таковым при дальнейшем изменении, как бы мало ни было положительное число N, то переменная называется бесконечно малой.*

Примечание. Бесконечно малой переменной не следует противопоставлять не существующую бесконечно малую постоянную; слово переменная присоединяется только для того, чтобы подчеркнуть характер бесконечно малой.

Принимая вместе с тем во внимание, что пределом бесконечно малой переменной служит нуль, дается и такое определение: *переменная называется бесконечно малой, если она имеет своим пределом нуль.*

Указывается, что для того, чтобы записать, что переменная x имеет своим пределом постоянную a, принято писать так: пред. $x = a$, или $\lim x = a$, где сокращение пред. обозначает русское слово „предел“, а сокращение lim — французское слово „limite“ (лимит), что в переводе означает предел.

Аналогично запись $\lim x = 0$ означает, что переменная x имеет своим пределом нуль и, следовательно, переменная x есть переменная бесконечно малая.

Надо обратить внимание на то, чтобы учащиеся четко уяснили себе различие между малой величиной и бесконечно малой переменной: так, например, $0{,}0000001 = 10^{-7}$ — малая величина; переменная же бесконечно малая — это такая переменная, которая в условиях данной задачи может стать меньше любой наперед заданной величины; так, разность между единицей и бесконечной десятичной дробью 0,9999... есть бесконечно малая переменная, ибо если оборвать эту бесконечную десятичную дробь на пятом десятичном знаке, разность между единицей и 0,99999 будет равна 0,00001, однако эта разность может быть сделана в 10, 100, 1000, ... раз меньше, если оборвать рассматриваемую бесконечную десятичную дробь на шестом, седьмом, восьмом, ... десятичном знаках.

Введение понятия о бесконечно малой переменной позволяет дать следующее определение предела переменной величины: *если разность*

между переменной и постоянной величиной есть бесконечно малая переменная, то постоянная есть предел переменной.

Записывается это так: $x - a = \alpha$, где x — переменная, a — постоянная и α — бесконечно малая переменная; отсюда $x = a + \alpha$ и, наконец, $\lim x = a$.

7. Наряду с понятием о бесконечно малой переменной следует дать учащимся понятие и о бесконечно большой переменной. Пусть дан натуральный ряд чисел: 1, 2, 3, 4,... Понятно, что сумма n первых членов этого ряда есть переменная величина.

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 \ldots + (n - 1) + n.$$

Если n будет принимать последовательно всевозможные значения, начиная от единицы, то S_n будет неограниченно возрастать вместе с увеличением числа членов n ряда; при этом переменная S_n может быть сделана больше любого наперед заданного весьма большого числа.

Дается определение: *если переменная x может быть сделана больше любого произвольно наперед заданного положительного числа N и остается таковой при дальнейшем изменении, каким бы большим ни было число N, то она называется бесконечно большой положительной переменной.*

В этом случае говорят, что переменная x неограниченно возрастает и приближается к пределу, равному положительной бесконечности. Символически это записывается так: $\lim x = +\infty$.

Надо разъяснить учащимся, что бесконечность не есть предел в указанном выше смысле, так как бесконечность не есть число. Знаком ∞ мы лишь обозначаем, что некоторая переменная может сделаться больше любого наперед заданного весьма большого числа.

В своей книжке „Великаны и карлики в мире чисел“ Литцман приводит наибольшее число, которое может быть записано тремя цифрами. Таким числом является число 9^{9^9}, которое состоит из 369 693 100 цифр, т. е. около одной трети миллиарда цифр; если бы можно было это число напечатать более или менее четко на полоске бумаги, то полоска имела бы длину 1200—1800 *км*, если же напечатать это число в виде книги, чтобы на каждую страницу пришлось 14 000 цифр, то она составила бы 33 тома по 800 страниц каждый.

Смысл действий над бесконечно малыми переменными.

8. После ознакомления учащихся с бесконечно малыми переменными можно на числовых примерах пояснить им, чему равен результат отдельных действий над этими переменными.

I. Пусть даны α и β — две бесконечно малые переменные, последовательно принимающие следующие значения:

$$\alpha = 3;\ 0{,}3;\ 0{,}03;\ 0{,}003;\ldots$$
$$\beta = 2;\ 0{,}2;\ 0{,}02;\ 0{,}002;\ldots$$

тогда $\alpha + \beta = 5;\ 0{,}5;\ 0{,}05;\ 0{,}005;\ldots$

т. е. **сумма двух бесконечно малых переменных есть также бесконечно малая переменная.**

Рассуждение это остается справедливым и для трех, четырех и т. д., вообще для ограниченного числа бесконечно малых; если же взять неограниченное число слагаемых, то их сумма может и не быть бесконечно малой.

Действительно, пусть дано n переменных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, каждая из которых равна $\frac{1}{n}$. Понятно, что в том случае, когда n неограниченно возрастает, каждая из переменных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ является бесконечно малой, однако их сумма

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot n = 1.$$

Необходимо указать, что в порядке кружковой работы, а также и в том случае, когда класс силен, следует рассмотреть как данную теорему, так и приводимые ниже теоремы не только на частных численных примерах, но и в общем виде.

После разбора отдельных теорем о бесконечно малых следует рассмотреть примеры и задачи, преимущественно геометрического характера, при решении которых теоремы о бесконечно малых находят свое приложение.

Задача. В треугольнике ABC вершина его C перемещается вдоль высоты CD по направлению к основанию AB и доходит до точки D — основания высоты. Какими величинами являются в этом случае углы A и B и их сумма?

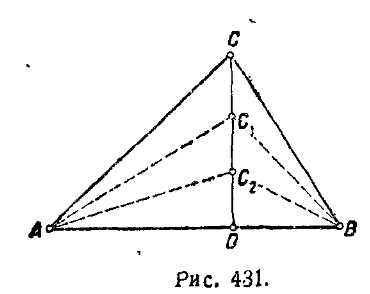


Рис. 431.

По мере того как вершина C треугольника ABC (рис. 431) перемещается вдоль высоты CD по направлению к основанию AB, углы A и B становятся все меньше и меньше. В пределе, когда вершина C дойдет до точки D, углы A и B станут равными нулю; таким образом, угол A и угол B — переменные, притом переменные бесконечно малые. На основании теоремы о сумме ограниченного числа бесконечно малых сумма углов A и B при данных условиях задачи есть переменная бесконечно малая.

И действительно $(A + B) \to 0$ по мере того, как вершина C приближается к точке D основания и $\lim (A + B) = 0$.

При решении данной задачи следует обратить внимание учащихся и на изменение: 1) высоты CD и других высот, проведенных из вершин углов A и B, 2) периметра и 3) площади треугольника.

Понятно, что: 1) высота $h_c = CD$ при данных условиях задачи — величина переменная и притом переменная бесконечно малая; 2) периметр треугольника — величина переменная, приближающаяся к определенному конечному пределу. На самом деле $\lim (AB + BC + CA) = 2AB$, так как в тот момент, когда вершина C совпадет с точкой D основания, сторона BC станет равной отрезку BD, а сторона AC — отрезку AD основания; таким образом, $AB + BC + CA \to AB + BD + DA = 2AB$; 3) площадь S_Δ при данных условиях задачи — величина переменная. В том случае, когда вершина C упадает в точку D основания, треугольник ABC перерождается в отрезок AB, так что $\lim S_\Delta \to 0$ по мере того, как высота треугольника убывает и в пределе равна нулю.

Для самостоятельной проработки учащимся может быть задана, например, следующая задача. Дан дельтоид $ABCD$ (рис. 432). Его вер-

шины B и D скользят по диагонали BD по направлению к точке пересечения O диагоналей дельтоида. Объяснить, какими величинами являются отрезки BO и DO диагонали BD и их сумма, а также углы A и C и их сумма, площади треугольников ABC и ADC и их сумма.

II. Разность двух бесконечно малых переменных есть переменная бесконечно малая или нуль.

Действительно:

$$\begin{array}{rllll} \alpha = 3; & 0{,}3; & 0{,}03; & 0{,}003; & \ldots \\ \beta = 2; & 0{,}2; & 0{,}02; & 0{,}002; & \ldots \\ \hline \alpha - \beta = 1; & 0{,}1; & 0{,}01; & 0{,}001; & \ldots \end{array}$$

В том случае, когда

$$\begin{array}{rllll} \alpha = 3; & 0{,}3; & 0{,}03; & 0{,}003; & \ldots \\ \text{и } \beta = 3; & 0{,}3; & 0{,}03; & 0{,}003; & \ldots \\ \hline \alpha - \beta = 0. & & & & \end{array}$$

Итак, разность двух бесконечно малых переменных может быть равной нулю.

Обобщая полученные результаты, заключаем, что **разность двух бесконечно малых переменных есть или бесконечно малая переменная *или нуль.***

Дается задача: дан треугольник ABC и его медиана $AM = m_a$ (рис. 433). Вершина C треугольника скользит вдоль стороны CB и доходит до вершины B. Объяснить, какими величинами являются площади данного треугольника ABC, треугольников ACM и ABM, полученных проведением медианы AM, сумма площадей этих двух треугольников, а также разность площадей треугольников ABC и ABM.

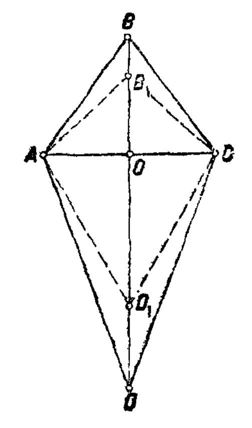


Рис. 432.

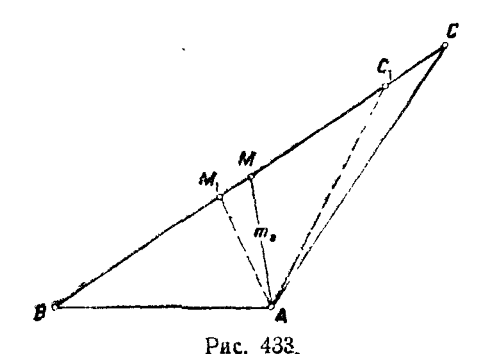


Рис. 433.

Очевидно, что при заданном условии задачи площади рассматриваемых треугольников — величины переменные, притом бесконечно малые; на основании теорем о сумме и разности бесконечно малых заключаем: сумма и разность площадей треугольников — бесконечно малые переменные, что и оправдывается всесторонним разбором данной задачи.

Итак, а) $\lim S_{ABC} = 0$; б) $\lim S_{ABM} = 0$; в) $(\lim S_{ABC} + S_{ABM}) = 0$ и г) $\lim (S_{ABC} - S_{ABM}) = 0$.

III. Произведение двух бесконечно малых переменных есть бесконечно малая переменная.

На самом деле:

$$\begin{array}{rllll} \alpha=3; & 0,3; & 0,03; & 0,003;\ldots \\ \beta=2; & 0,2; & 0,02; & 0,002;\ldots \\ \hline \alpha\cdot\beta=6; & 0,06; & 0,0006; & 0,000006;\ldots \end{array}$$

Следствие: **целая положительная *n*-я степень бесконечно малой переменной есть бесконечно малая переменная.**

IV. Произведение бесконечно малой переменной и постоянного числа *n*, отличного от нуля, есть бесконечно малая переменная.

Пусть
$$\alpha=3;\ 0,3;\ 0,03;\ 0,003;\ldots$$
$$n=5;\ 5;\ 5;\ 5;\ldots$$

т. е. n — число постоянное, сохраняющее на протяжении всего процесса изменения одно и то же значение. Тогда

$$\alpha\cdot n=15;\ 1,5;\ 0,15;\ 0,015;\ldots$$

IVa. Произведение бесконечно малой переменной α и ограниченного переменного y есть бесконечно малая переменная.

Если y — ограниченное переменное, то $y\leqq A$, где A — постоянное число, а потому $\alpha y\leqq\alpha A$, т. е. αy — бесконечно малая переменная.

Учащимся могут быть предложены следующие задачи:

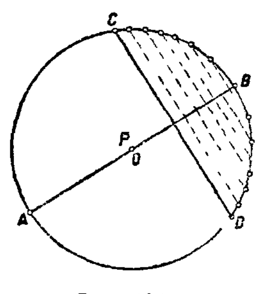


Рис. 434.

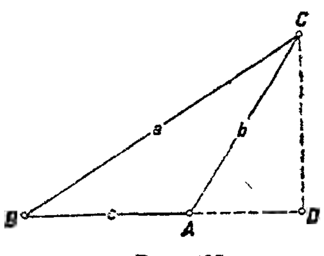


Рис. 435.

1) В круге с центром O проведены диаметр AB и перпендикулярная к нему хорда CD, пересекающиеся в точке P (рис. 434). Хорда CD перемещается параллельно самой себя, удаляясь от центра O и доходит до точки B. Объяснить, какими величинами являются при заданном условии задачи отрезки диаметра AB и хорды CD, а также их произведение.

Понятно, что отрезки OP, PD и PB — величины переменные, притом PD и PB — бесконечно малые; отрезок AP — тоже величина переменная, ее предел — диаметр AB, так что а) $\lim AP=AB$; б) $\lim CP=0$; в) $\lim PD=0$; г) $\lim PB=0$.

При заданном условии задачи произведение а) отрезков хорды CD, т. е. $PC\cdot PD$ — переменная бесконечно малая, на основании теоремы о произведении бесконечно малых и б) отрезков диаметра AB, т. е. $PA\cdot PB$ — переменная бесконечно малая на основании теоремы о произведении бесконечно малой переменной и постоянной. Итак, $\lim(PC\cdot PD)=0$ и $\lim(PA\cdot PB)=0$.

2) В треугольнике ABC угол A — тупой. Соотношение между его сторонами выражается формулой: $a^2 = b^2 + c^2 + 2c \cdot m$, где m — проекция стороны b на продолжение стороны c (рис. 435). Объяснить, какими величинами являются: а) длина отрезка $AD = m$ и б) произведение $2c \cdot m$, если известно, что угол A, уменьшаясь, становится равным d.

По мере того как угол A убывает, уменьшается и отрезок m; когда $\angle A = d$, $m = 0$; таким образом, $\lim m = 0$ и, следовательно, длина отрезка m есть величина переменная бесконечно малая. Понятно, что и произведение $2c \cdot m$ — переменная бесконечно малая, так как $\lim(2c \cdot m) = 0$, когда $\angle A = d$.

V. **Частное от деления бесконечно малой переменной на постоянное, отличное от нуля, есть бесконечно малая переменная.**

Имеем:

$$\alpha = 3;\ 0{,}3;\ 0{,}03;\ 0{,}003;\ldots$$

Делим α на 6, тогда:

$$\frac{\alpha}{6} = 0{,}5;\quad 0{,}05;\quad 0{,}005;\quad 0{,}0005;\ldots$$

VI. Следует показать учащимся, что **частное от деления двух бесконечно малых переменных может быть или постоянным числом, или бесконечно большой переменной, или бесконечно малой переменной.**

Действительно,

$$\begin{array}{llllll} 1)\ \text{пусть} & \alpha = 3; & 0{,}3; & 0{,}03; & 0{,}003;\ldots \\ & \beta = 1; & 0{,}1; & 0{,}01; & 0{,}001;\ldots \\ \hline \text{тогда} & \frac{\alpha}{\beta} = 3; & 3; & 3; & 3;\ldots \end{array}$$

Итак, $\frac{\alpha}{\beta} = 3$ — частное $\frac{\alpha}{\beta}$ есть число постоянное;

$$\begin{array}{llllll} 2)\ \text{пусть} & \alpha = 3; & 0{,}3; & 0{,}03; & 0{,}003,\ldots \\ & \beta = 1; & 0{,}01; & 0{,}0001; & 0{,}000001\ldots \\ \hline \text{тогда} & \frac{\alpha}{\beta} = 3; & 30; & 300; & 3000;\ldots \end{array}$$

т. е. частное $\frac{\alpha}{\beta}$ есть бесконечно большая переменная, так как может сделаться больше какого угодно большого числа и останется больше этого числа при всех дальнейших изменениях делимого и делителя;

$$\begin{array}{llllll} 3)\ \text{пусть} & \alpha = 3; & 0{,}03; & 0{,}0003; & 0{,}000003;\ldots \\ & \beta = 1; & 0{,}1; & 0{,}01; & 0{,}001;\ \ldots \\ \hline \text{тогда} & \frac{\alpha}{\beta} = 3; & 0{,}3; & 0{,}03; & 0{,}003;\ldots \end{array}$$

т. е. частное $\frac{\alpha}{\beta}$ есть бесконечно малая переменная; $\frac{\alpha}{\beta} \to 0$.

Теоремы о пределах.

9. Ниже приводятся основные теоремы о пределах. Переменные величины обозначают последними буквами латинского алфавита: x, y, z,..., и их пределы — начальными буквами: a, b, c,..., бесконечно малые переменные — начальными буквами греческого алфавита: α, β, γ,...; разность же $x - a$ или $a - x$, независимо от

того, является ли она положительной или отрицательной, т. е. будет ли переменная x приближаться к своему пределу a, убывая или возрастая, обозначают через α, принимая во внимание, что бесконечно малая переменная α может быть и положительной и отрицательной.

Теорема 1. **Переменная величина может иметь не более одного предела.**

Дана переменная x, стремящаяся к пределу a.

Запись:

$$\lim x = a, \text{ или } x = a + \alpha. \qquad (1)$$

Допустим, что переменная x имеет кроме a еще пределом постоянную b, т. е.

$$\lim x = b, \text{ или } x = b + \beta. \qquad (2)$$

Сопоставляя равенства (1) и (2), имеем:

$$a + \alpha = b + \beta, \text{ или } a - b = \beta - \alpha, \qquad (3)$$

Левая часть равенства (3) как разность двух постоянных величин есть величина постоянная, правая же часть — разность двух бесконечно малых переменных — есть или бесконечно малая переменная или нуль. Но постоянная величина не может равняться переменной, а потому $a - b = 0$, откуда $a = b$. Итак, предполагаемый второй предел b переменной x равен a, т. е. переменная x не может иметь более одного предела.

Примечание. Переменная может иногда и не иметь предела. Так, например, переменная $x = \sin \alpha$ при изменении α будет все время колебаться между $+1$ и -1 и не будет приближаться ни к какому пределу.

Теорема 2. **Если две переменные x и y, пределы которых соответственно равны a и b $(b \neq 0)$, при всех своих изменениях сохраняют постоянное отношение k, то то же отношение сохраняют и их пределы, т. е. $\frac{\lim x}{\lim y} = k$.**

Даны: переменные x и y, $\lim x = a$ и $\lim y = b$,

$$\frac{x}{y} = k$$

Тр. док. $\frac{\lim x}{\lim y} = k$.

Доказательство. $\lim x = a$ и $\lim y = b$, а потому $x = a + \alpha$ и $y = b + \beta$. По условию $\frac{x}{y} = k$, или $\frac{a+\alpha}{b+\beta} = k$, откуда $a + \alpha = bk + \beta k$, или $a - bk = \beta k - \alpha$. Правая часть данного равенства — бесконечно малая переменная или нуль, левая же часть — величина постоянная, следовательно она может равняться только нулю, а потому $a - bk = 0$, откуда $a = bk$, или $\frac{a}{b} = k$; но $a = \lim x$ и $b = \lim y$, а потому имеем: $\frac{\lim x}{\lim y} = k$.

В том случае, когда $k = 1$, имеем: $x = y$ и $\lim x = \lim y$, отсюда следствие:

если две переменные, имеющие пределы, при всех своих изменениях равны, то равны и их пределы.

Теорема 3. **Если постоянная величина a заключена между двумя переменными x и y, разность между которыми $x - y$ есть переменная бесконечно малая α, то обе переменные имеют эту постоянную своим пределом.**

Даны переменные x и y; $x-y=\alpha$ и $y<a<x$. Требуется доказать: $\lim x=\lim y=a$.

Доказательство. Согласно условию: 1) $y<a<x$ и 2) $x-y=\alpha$, следовательно $a-y<\alpha$ и $x-a<\alpha$, где α — бесконечно малая переменная.

Пусть $a-y=\alpha_1$ и $x-a=\alpha_2$, где α_1 и α_2 — бесконечно малые переменные; отсюда следует, что $\lim y=a$ и $\lim x=a$.

Учащимся следует привести пример двух переменных, стремящихся к одному и тому же пределу. Так, дробь $x=\frac{n+1}{n}$ при неограниченном возрастании n стремится к пределу, равному 1, все время уменьшаясь. Действительно, $x=\frac{n+1}{n}=\frac{n}{n}+\frac{1}{n}=1+\frac{1}{n}$. При неограниченном возрастании n дробь $\frac{1}{n}$ уменьшается и может быть сделана менее любого наперед заданного весьма малого положительного числа, следовательно $\lim\frac{1}{n}=0$ при n, возрастающем беспредельно; записывают это символически так: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}x=1$.

С другой стороны, дробь $y=\frac{n}{n+1}$ при неограниченном возрастании n стремится к пределу, равному 1, все время возрастая.

Действительно, $y=\frac{n}{n+1}=\frac{n+1-1}{n+1}=\frac{n+1}{n+1}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$.

При неограниченном возрастании n дробь $\frac{1}{n+1}$ уменьшается и может быть сделана менее любого наперед заданного весьма малого положительного числа, следовательно это бесконечно малая переменная, а потому $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$; отсюда следует, что $\lim y=1$.

Четкое уяснение рассмотренных теорем весьма существенно для понимания доказательства теорем о пределах.

Действия над пределами.

10. Рассмотрим некоторые теоремы, касающиеся результатов действий над переменными, имеющими предел.

Теорема 1. **Предел алгебраической суммы ограниченного числа переменных, имеющих предел, равен алгебраической сумме их пределов.**

Даны переменные: $x, y, z, \ldots, t$ и их пределы: $a, b, c, \ldots, l$, так что $\lim x=a$, $\lim y=b$, $\lim z=c, \ldots, \lim t=l$.

Тр. док.: $\lim(x+y+z+\ldots+t)=\lim x+\lim y+\lim z+\ldots+\lim t$

Доказательство.
$$x=a+\alpha$$
$$y=b+\beta$$
$$z=c+\gamma$$
$$\cdots\cdots$$
$$t=l+\lambda$$
$$x+y+z+\ldots+t=(a+b+c+\ldots+l)+(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda);$$

но $\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda$ — бесконечно малая переменная, отсюда, согласно определению предела, имеем:

$$\lim(x+y+z+\ldots+t)=a+b+c+\ldots+l.$$

Но $a = \lim x$, $b = \lim y$, $c = \lim z, \ldots$, а потому

$$\lim (x + y + z + \ldots + t) = \lim x + \lim y + \lim z + \ldots \lim t.$$

Следует иметь в виду, что теорема справедлива и в том случае, когда один или несколько членов суммы — величины постоянные, так как $\lim a = a$.

Теорема 2. **Предел произведения ограниченного числа переменных, имеющих предел, равен произведению пределов сомножителей.**

Даны переменные: $x, y, z, \ldots, t$ и их пределы: $a, b, c, \ldots, l$.

Тр. док.: $\lim (x, y, z, \ldots, t) = \lim x \cdot \lim y \cdot \lim z \cdots \lim t.$

Справедливость теоремы доказывается сперва для двух сомножителей, затем для трех и более сомножителей.

Если $\lim x = a$ и $\lim y = b$, то $x = a + \alpha$ и $y = b + \beta$, отсюда

$$x \cdot y = (a + \alpha)(b + \beta) = ab + \alpha b + \beta a + \alpha\beta.$$

Последние три члена правой части — бесконечно малые переменные, следовательно и их сумма — бесконечно малая, положим ε, тогда:

$$x \cdot y = ab + \varepsilon,$$

или, согласно определению предела, $\lim (xy) = ab$, но $a = \lim x$ и $b = \lim y$, а потому

$$\lim (xy) = \lim x \cdot \lim y.$$

Если даны три переменные: x, y и z, то

$$\lim (x \cdot y \cdot z) = \lim [(xy) \cdot z] = \lim (xy) \cdot \lim z = \lim x \cdot \lim y \cdot \lim z.$$

Для большего, но ограниченного числа переменных доказательство аналогично последнему.

Следует рассмотреть два следствия, вытекающие из данной теоремы.

Следствие 1. **Если один из сомножителей — число постоянное, то его можно вынести за знак lim.**

Действительно:

$$\lim (axy) = \lim a \cdot \lim xy = a \lim xy,$$

так как предел постоянного числа равен самому числу.

Следствие 2. **Предел n-й целой положительной степени переменной величины x, имеющей предел, равен той же степени ее предела основания.**

$$\lim (x^n) = \lim (x \cdot x \ldots) = \lim x \cdot \lim x \cdot \lim x \ldots \lim x = (\lim x)^n.$$

Теорема 3. **Предел частного двух переменных величин, имеющих предел, равен частному их пределов, если предел делителя не равен нулю.**

Даны переменные x и y и $\lim x = a$ и $\lim y = b$, при этом $b \neq 0$.

Тр. док.: $\lim \dfrac{x}{y} = \dfrac{\lim x}{\lim y}$.

Доказательство. $x = a + \alpha$ и $y = b + \beta$, следовательно

$$\frac{x}{y} = \frac{a + \alpha}{b + \beta}.$$

Если вычесть из обеих частей данного равенства $\frac{a}{b}$, то получим:

$$\frac{x}{y}-\frac{a}{b}=\frac{a+\alpha}{b+\beta}-\frac{a}{b}=\frac{ab+\alpha b-ab-\beta a}{b^2+b\beta}=\frac{\alpha b-\beta a}{b^2+b\beta}.$$

Итак,

$$\frac{x}{y}-\frac{a}{b}=\frac{\alpha b-\beta a}{b^2+b\beta}.$$

Правая часть данного равенства — бесконечно малая переменная, так как числитель — бесконечно малая, а знаменатель — ограниченная переменная величина, например меньшая b^2+1, стремящаяся к пределу b^2, не равному нулю; из этого следует, согласно определению предела, что

$$\lim\frac{x}{y}=\frac{a}{b},$$

но $a=\lim x$ и $b=\lim y$, а потому

$$\lim\frac{x}{y}=\frac{\lim x}{\lim y}, \text{ если } \lim y\neq 0.$$

Следует указать, что решением математических вопросов методом пределов пользуются в тех случаях, когда требуется установить зависимость между постоянными величинами, не поддающимися непосредственному сравнению.

Поступают при этом так: рассматривают вместо постоянных величины переменные более простого вида, пределами которых служат исследуемые постоянные, находят затем определенные соотношения между переменными и, заменив переменные соответствующими им пределами, находят, наконец, искомую зависимость между данными постоянными.

11. После рассмотрения с учащимися основных теорем о пределах и свойств результатов действий над переменными, имеющими пределы, следует применить изученную теорию к решению отдельных вопросов методом пределов.

Бесконечно убывающая кратная прогрессия.

Целесообразно начать с нахождения суммы членов бесконечно убывающей кратной прогрессии. Хорошо, если рассмотрение этого вопроса будет согласовано с работой класса по курсу алгебры и проработано на уроках алгебры.

Рассмотрим решение вопроса в общем виде.

Дана убывающая кратная прогрессия: $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$; постоянное прогрессии $q<1$, число членов прогрессии равно n. Сумма n членов определяется по формуле:

$$S_n=\frac{u_1-u_1q^n}{1-q}=\frac{u_1}{1-q}-\frac{u_1q^n}{1-q}.$$

S_n — величина переменная, ее значение зависит от числа n членов прогрессии.

Посмотрим, к какому пределу стремится S_n при n, неограниченно возрастающем, т. е. найдем предел S_n при $n\to\infty$.

$$\lim_{n\to\infty}S=\lim_{n\to\infty}\frac{u_1-u_1q^n}{1-q}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_1}{1-q}-\frac{u_1q^n}{1-q}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{u_1}{1-q}-\lim_{n\to\infty}\frac{u_1q^n}{1-q},$$

на основании теоремы о пределе разности двух переменных. Первое слагаемое правой части данного равенства не зависит от числа n, это число постоянное, а потому $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_1}{1-q}=\frac{u_1}{1-q}$, так как предел постоянного равен самому постоянному; что же касается второго слагаемого, то оно — бесконечно малая переменная, так как q^n при $n\to\infty$ — бесконечно малая переменная и, следовательно, u_1q^n и $\frac{u_1q^n}{1-q}$ при $n\to\infty$ — бесконечно малые переменные на основании теоремы о произведении переменной бесконечно малой и постоянной, а потому $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_1q^n}{1-q}=0$, отсюда имеем:

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{u_1}{1-q}.$$

Примеры. 1) Дана прогрессия: $\div 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8},\ldots$
Найти $\lim S_n$ при $n\to\infty$.

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$$

2) Найти предел периодической дроби 0,888...

Данную дробь можно записать в виде суммы бесконечно убывающей кратной прогрессии, постоянное которой $q=\frac{1}{10}$.

$$0{,}888\ldots=0{,}8+0{,}08+0{,}008+\ldots$$

Следовательно,

$$\lim 0{,}888\ldots=\frac{0{,}8}{1-0{,}1}=\frac{8}{9}.$$

3) Найти предел периодической дроби 2,171717...

$$\lim 2{,}1717\ldots=\lim(2+0{,}1717\ldots)=\lim 2+\lim 0{,}1717\ldots=$$

$$=2+\frac{0{,}17}{1-0{,}01}=2+\frac{0{,}17}{0{,}99}=2\frac{17}{99}.$$

§ 21. Длина окружности и площадь круга.

Длина окружности.

1. Переходя к нахождению длины окружности, необходимо разъяснить учащимся, что нельзя измерить длину окружности непосредственно при помощи линейной меры, так как линейная мера, будучи отрезком прямой, не может быть совмещена с кривой линией, каковой является окружность. В силу этого приходится определять длину окружности *косвенным путем*, рассматривая окружность как предел периметров правильных вписанных и описанных многоугольников при безграничном удвоении числа их сторон.

Чтобы притти к окончательному выводу формулы длины окружности, необходимо предварительно рассмотреть нижеследующие теоремы.

Теорема 1. **Апофема правильного вписанного n-угольника при неограниченном удвоении числа его сторон имеет своим пределом радиус окружности.**

Действительно, пусть в окружность радиуса R вписан правильный n-угольник, сторона которого $AB = a_n$ (рис. 436). Проводим апофему $OM = h_n$; из треугольника AOM заключаем, что $R - h_n < \frac{a_n}{2}$. На основании аксиомы: отрезок прямой короче всякой другой линии, концы которой совпадают с концами отрезка, имеем: $\frac{1}{n}$ окружности, т. е. дуга ANB, больше хорды AB, а потому $MB < NB$; но дуги окружности при неограниченном удвоении числа делений становятся все меньше и меньше и могут быть сделаны меньше какой угодно наперед заданной величины, следовательно будет уменьшаться и разность

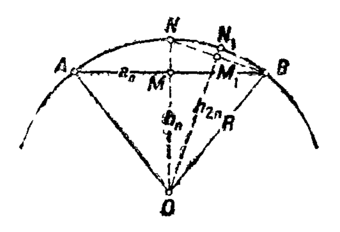


Рис. 436.

$$R - h_n < \frac{a_n}{2},$$
$$R - h_{2n} < \frac{a_{2n}}{2},$$
$$R - h_{4n} < \frac{a_{4n}}{2},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

и при $n \to \infty$ разность эта бесконечно мала, значит $\lim\limits_{n \to \infty} h_n = R$ на основании определения предела.

Теорема 2. **Окружность есть предел периметров правильных вписанного и описанного многоугольников при неограниченном удвоении числа их сторон.**

Рассматривают для упрощения два одноименных правильных вписанный и описанный около окружности радиуса R, n-угольника, хотя теорема верна и для всяких многоугольников. Эти многоугольники подобны, а потому

$$\frac{p_n}{P_n} = \frac{h_n}{R},$$

где P_n — периметр описанного n-угольника, а p_n — периметр и h_n — апофема вписанного n-угольника. Вычитая левую и правую части равенства из единицы, получаем:

$$1 - \frac{p_n}{P_n} = 1 - \frac{h_n}{R} \quad \text{или} \quad \frac{P_n - p_n}{P_n} = \frac{R - h_n}{R}$$

и имеем:

$$P_n - p_n = P_n \cdot (R - h_n) \cdot \frac{1}{R} \leqq 4D(R - h_n) \cdot \frac{1}{R}.$$

При $n \to \infty$ множитель $R - h_n$ — бесконечно малая переменная, и, следовательно, произведение, стоящее в правой части равенства, — величина бесконечно малая, стремящаяся к нулю, а потому и $P_n - p_n \to 0$.

Действительно, на основании теоремы: предел произведения равен произведению пределов, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4D}{R}\left(R-h_n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4D}{R} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(R-h_n\right) = \frac{4D}{R} \cdot 0 = 0,$$

так как $\lim_{n\to\infty} (R-h_n) = 0$, а потому и $\lim_{n\to\infty} (P_n - p_n) = 0$.

Принимая вместе с тем во внимание, что объемлющая линия всегда меньше выпуклой объемлемой линии, а следовательно

$$p_n < C < P_n,$$

заключаем, на основании теоремы о пределе двух переменных, между которыми заключена постоянная, что

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} p_n = C.$$

Пусть длина P_{on} при последовательном удвоении числа сторон равна OA_1, OB_1, OC_1, ..., и при этом $OA_1 > OB_1 > OC_1$... Отложим соответствующей длины отрезки на числовой оси (рис. 437).

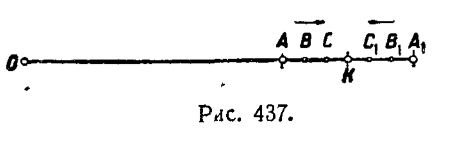


Рис. 437.

При удвоении числа сторон правильного вписанного многоугольника его периметр $p_{вn}$ увеличивается, и пусть длина периметров соответственно равна отрезкам OA, OB, OC, ..., причем $OA < OB < OC$... Отложим соответствующие отрезки также на числовой оси (рис. 437).

Зная, что объемлющая линия всегда больше выпуклой объемлемой, и определяя предельные значения все уменьшающегося периметра описанного правильного многоугольника и все увеличивающегося периметра правильного вписанного многоугольника, заключаем, что оба они стремятся к некоторому пределу, равному отрезку OK, который принимается за длину окружности. Итак:

1) окружность больше периметра правильного вписанного и меньше периметра правильного описанного одноименных многоугольников при неограниченном удвоении числа их сторон;

2) окружность есть предел периметров правильных одноименных вписанного и описанного многоугольников при неограниченном удвоении числа их сторон.

Теорема 3. **Отношение длины любой окружности к своему диаметру есть число постоянное.**

Даны две окружности: пусть их радиусы равны R_1 и R_2, а длины окружностей равны C_1 и C_2. Если вписать в каждую из окружностей по правильному одноименному n-угольнику, то вследствие подобия этих многоугольников

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{2R_1}{2R_2},$$

где p_1 и p_2 — периметры соответственных n-угольников.

Если затем неограниченно удваивать число сторон многоугольников, то отношение $\frac{p_1}{p_2}$ не изменится, а потому, переходя к пределу и заменив

переменные p_1 и p_2 их пределами C_1 и C_2, на основании теоремы: предел частного двух переменных, имеющих предел, равен частному их пределов, если предел делителя не равен нулю, — имеем:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_1}{p_2} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} p_1}{\lim\limits_{n \to \infty} p_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{2R_1}{2R_2}.$$

Из последнего равенства находим:

$$\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}$$

и заключаем, что **отношение любой окружности к своему диаметру есть величина постоянная.**

Это постоянное число принято обозначать греческой буквой π.

Итак, $\frac{C}{2R} = \pi$. Из данного равенства находится длина окружности $C = 2\pi R$.

Если обозначить $2R$ через D, где D — диаметр окружности, то $C = \pi D$.

Формула длины окружности читается так: **длина окружности в π раз больше своего диаметра или в 2π раз больше своего радиуса.**

В технике обычно пользуются формулой $C = \pi D$.

Понятно, что длина окружности определена, если известен ее радиус; длина окружности выражается в тех же линейных единицах, в которых выражается ее радиус.

Отметим, что определение длины окружности в линейных единицах, называется ректификацией, или выпрямлением, окружности.

Вычисление длины дуги окружности радиуса R по числу n градусов, содержащихся в дуге, не представляет каких-либо затруднений.

Очевидно, что длина дуги в $1°$ равна $\frac{2\pi R}{360}$, а длина дуги a в $n°$:

$$a = \frac{2\pi R}{360} \cdot n = \frac{n\pi R}{180}.$$

Формула позволяет решить и обратную задачу: найти, сколько градусов содержит дуга длиною в a единиц, если известно, что радиус окружности, которой принадлежит дуга, равен R.

$$n° = 180° \cdot \frac{a}{\pi R}.$$

В частном случае, когда $a = R$, мы получаем:

$$n° = 180° \cdot \frac{1}{\pi} \approx 57°17'44'',8,$$

т. е. дуга длиною в R содержит приблизительно $57°17'45''$.

Число π.

2. Итак, вычисление длины окружности сводится к вычислению числа π, которое геометрически можно мыслить как половину длины окружности, радиус которой равен единице.

Уже Архимед из Сиракуз (287—212 гг. до н. э.) воспользовался для вычисления длины окружности тем фактом, что при возрастании n — числа сторон n-угольника — разность между P_n и p_n может стать меньше любого наперед заданного числа, рассматривая сперва n-уголь-

ник, затем $2n$-угольник, $4n$-угольник и т. д. Начав рассуждение с правильно описанных и вписанных многоугольников, где число сторон $n=6$, и дойдя до числа сторон $n=96$, Архимед нашел указанным выше приемом, что

$$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{10}{70}.$$

Следует принять во внимание, что такого рода вычисления, доступные в настоящее время учащемуся средней школы, во времена Архимеда представляли большие трудности, особенно если учесть, что о десятичных дробях тогда еще ничего не знали.

Позднее Клавдий Птоломей (87—165 гг.) дал для π число $3^\circ8'30''$, т. е. $3+\frac{8}{60}+\frac{30}{360}\approx3{,}14166$. У римлян вопрос о вычислении числа π не продвинулся вперед. Изыскания греков продолжали индусы: Ариабхата (476 г.) довел в своих вычислениях число сторон многоугольника до $n=384$ и нашел $\pi=3{,}1416$; индусским математиком Брахмагупта (598 г.) было дано и число $\sqrt{10}\approx3{,}1623$.

Время переселения народов было временем застоя развития наук, и только в 1220 г. Леонард Пизанский, вычисляя периметр 96-угольника, нашел, что

$$\frac{1440}{458\frac{1}{5}}<\pi<\frac{1440}{458\frac{4}{9}}.$$

Так дело с вычислением π продолжалось до Адриана Меция, жившего в конце XVI в. С этого времени начинается как бы соревнование в вычислении числа π с возможно бо́льшим числом десятичных знаков. Адриан Меций нашел для π число $\frac{355}{113}=3{,}1415929\ldots$, верное до седьмого десятичного знака. Число это легко запомнить, если написать два раза подряд каждое из первых трех нечетных чисел натурального ряда: 113355; тогда последние три цифры дают числитель, а первые три — знаменатель приближенного значения числа π, данного Мецием.

Упомянем Лудольфа Ван-Цейлена, получившего число π сперва с точностью до 20-го знака, при вычислении периметра многоугольника с числом сторон, равным $60\cdot2^{29}$, а затем давшего число π, приближенно равное

3,14159265358979323846264338327950 (с недостатком)
и 3,14159265358979323846264338327951 (с избытком).

Нужно удивляться терпению этого математика.

Этого рода вычисления не имеют практической ценности; такими значениями числа π никогда не пользуются.

Все эти вычислители в основном пользовались методом Архимеда, являясь подражателями его, и ни один из них не дал новых путей подхода к вычислению числа π.

В основном они находили число π приближенно через вычисление периметров правильных вписанных и описанных многоугольников при любом числе n сторон многоугольника по формуле

$$a_{2n}=R\sqrt{2-\sqrt{4-\frac{a_n^2}{R^2}}}.$$

Сначала они вычисляли a_{2n}, a_{4n}, a_8, ..., затем находили по формуле

$$b_n = \frac{2a_n}{\sqrt{4 - \frac{a_n^2}{R^2}}};$$

сперва b_n и, применяя формулу удвоения, b_{2n}, b_{4n}, ...

Далее определяли $P_n = mb_m$ и $p_n = ma_m$ для $m = n$, $2n$, $4n$, $8n$, ...

И только француз Виета (1450 — 1606 гг.) впервые дал аналитический метод вычисления числа π в виде бесконечного произведения, получив следующую формулу для определения числа π:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots}$$ до бесконечности.

Им начинается второй период вычисления числа π, период аналитического метода, в отличие от первого периода, который может быть назван периодом геометрического метода.

Период аналитического метода, начатый Виета, дал еще более точное значение для числа π, выраженного при помощи бесконечных рядов, произведений и цепных или непрерывных дробей. Можно указать на работы в этой области Валлиса (1616 — 1703 гг.), Грегори (1670 г.) и Лейбница (1673 г.).

Формула Валлиса:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots$$

Формула Лейбница:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

Следует еще отметить Леонарда Эйлера (1707 — 1783 гг.), который дал формулы:

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \cdots,$$

$$\frac{\pi^3}{32} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \cdots.$$

Он же ввел для обозначения отношения длины окружности к ее диаметру греческую букву π, которая служит начальной буквой греческого слова περἰφερεἰα (периферейа).

Не приводя ряда других формул (их можно найти в книге Рудио „О квадратуре круга“), укажем, что математиком Шенксом число π было вычислено с 707 десятичными знаками. Вычисление с таким большим числом десятичных знаков указывает только на совершенство современных методов вычисления по сравнению с методом древних; научного или практического значения найденные результаты не имеют; уже „точность со 100 десятичными знаками выше всякого человеческого разумения“.

Период аналитического метода сменил период, который можно назвать периодом, определяющим сущность числа π, его природу. Открытия, сделанные в связи с развитием анализа, ошеломляюще действовали на всех мыслителей того времени, и если до этого времени проходили века

и с трудом добывались новые сведения, открывавшие тайники математики, то теперь, с развитием анализа, математика шагнула гигантскими шагами.

Все же проблема ректификации окружности, т. е. построения с помощью только циркуля и линейки отрезка, равного длине окружности, оставалась неразрешенной. И если наиболее выдающиеся математики уже высказывали мысль о неразрешимости этой задачи и считали число π трансцендентным, т. е. таким, которое не может служить корнем никакого алгебраического уравнения, то было немало лиц, которые, увлекшись этой проблемой, ставшей популярной, полагали, в силу своей недостаточной осведомленности в отдельных вопросах математики, что найденное ими решение верно.

Первый толчок к определению характера числа π дал Ламберт (1728—1777 гг.). Дальнейшие исследования Лиувилля (1840 г.) и Эрмита (1873 г.) послужили основанием для работ Линдемана (1882 г.), который доказал трансцендентность числа π и тем самым невозможность построения числа π с помощью одного только циркуля и линейки — построения, связанного с конечным числом действий первой и второй ступеней и избранными третьей ступени вида квадратных радикалов.

Площадь круга и его частей.

3. Площадь круга. Указывается, что площади правильных вписанных и описанных многоугольников при неограниченном удвоении числа их сторон — величины переменные и что площадь круга есть их общий предел, когда число сторон n неограниченно возрастает. Последнее утверждение следует доказать.

Если сравнить внутренние области вписанных и описанных многоугольников с внутренней областью круга, то ясно, что внутренняя область круга больше внутренней области вписанного в этот круг многоугольника и меньше внутренней области описанного многоугольника.

Итак, $S_{вп} < K < S_{оп}$, где $S_{вп}$ — площадь правильного вписанного многоугольника, $S_{оп}$ — площадь правильного описанного многоугольника и K — площадь круга.

Докажем, что разность $S_{оп} - S_{вп}$ при $n \to \infty$ есть бесконечно малая переменная.

Вписав в круг правильный n-угольник и описав около него правильный одноименный многоугольник, получим два подобных многоугольника. Из их подобия следует, что $\frac{S_{вп}}{S_{оп}} = \frac{h_n^2}{R^2}$, где h_n — апофема правильного вписанного n-угольника.

Вычитая почленно из единицы обе части полученного равенства, имеем:

$$1 - \frac{S_{вп}}{S_{оп}} = 1 - \frac{h_n^2}{R^2} \quad \text{или} \quad \frac{S_{оп} - S_{вп}}{S_{оп}} = \frac{R^2 - h_n^2}{R^2};$$

$$S_{оп} - S_{вп} = S_{оп}(R - h_n)(R + h_n) \cdot \frac{1}{R^2}.$$

Заменив $S_{оп}$ числом $4R^2$, измеряющим площадь описанного правильного четырехугольника, т. е. числом бо́льшим, начиная с $n = 5$ и далее, и во второй скобке слагаемое h_n через R, тоже бо́льшее число, мы увеличим правую часть равенства, и тогда

$$S_{оп} - S_{вп} < 4R^2(R - h_n) \cdot 2R \cdot \frac{1}{R^2}$$

или

$$S_{on} - S_{en} < 8R(R - h_n).$$

Если $n \to \infty$, то множитель $R - h_n$ — переменная бесконечно малая, а потому вся правая часть как произведение конечного числа на бесконечно малую тоже бесконечно мала, т. е.

$$S_{on} - S_{en} \to 0, \text{ откуда } \lim S_{on} = \lim S_{en},$$

но

$$S_{en} < K < S_{on}, \text{ а потому } \lim S_{on} = \lim S_{en} = K.$$

Итак, доказано, что площадь круга есть предел правильных вписанного и описанного многоугольников при неограниченном удвоении числа их сторон.

Остается вывести формулу площади круга. Известно, что

$$S_{on} = \frac{1}{2} P_n \cdot R.$$

Переходя к пределу, когда $n \to \infty$, имеем:

$$\lim_{\to\infty} S_{on} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} P_n \cdot R\right) = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} P_n \cdot \lim_{n\to\infty} R = \frac{1}{2} C \cdot R$$

на основании теоремы: предел произведения ограниченного числа переменных, имеющих предел, равен произведению пределов сомножителей, принимая вместе с тем во внимание, что

$$\lim_{n\to\infty} P_n = C \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} R = R.$$

Итак, $K = \frac{1}{2} CR$, но $C = 2\pi R$, следовательно $K = \pi R^2$.

Площадь сектора $S_{сект}$, содержащего n°, при радиусе R равна:

$$S_{сект} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ = \frac{\pi R^2 n}{360}. \qquad (1)$$

Принимая во внимание, что $\frac{\pi R n}{180} = a$, длине дуги сектора, получим:

$$S_{сект} = \frac{a \cdot R}{2}, \qquad (2)$$

т. е. **площадь сектора равна половине произведения дуги сектора на радиус**; формула эта сходна с формулой площади треугольника.

Чтобы лучше уяснить учащимся переход от формулы (1) к формуле (2), следует определить сперва из формулы $\frac{\pi R n}{180} = a$ число n; получаем $n = \frac{180a}{\pi R}$; если подставить полученное для n значение в формулу (1) и выполнить необходимое сокращение, то получится формула (2).

Если дуга сектора равна 360°, что указывает, что сектор обращается в круг, то площадь его по этой формуле даст $\frac{2\pi R \cdot R}{2} = \pi R^2$ — известную формулу площади круга.

Площадь сегмента можно рассматривать как разность или сумму площадей соответствующего сектора и треугольника.

Если у преподавателя нет достаточно времени для относительно основательной постановки проблемы об измерении величины геометри-

ческих фигур, ограниченных криволинейным контуром, как это выше изложено, то можно ограничиться более интуитивным пониманием бесконечно малой переменной и предела. Такое изложение дано в стабильном учебнике. В последнем случае следует после общей установки о бесконечно малой переменной и пределе, минуя теоремы о действиях над бесконечно малыми переменными и развитую теорию пределов, перейти к длине окружности и площади круга.

Считаем все же нужным отметить, что при достаточно углубленной подготовленности учащихся лучше придерживаться первого изложения вопроса, так как затраченное время окупится при прохождении весьма серьезных вопросов в стереометрии в связи с нахождением поверхностей и объемов круглых тел и объемов многогранников вида пирамиды. Если общее математическое развитие класса не стоит на должной высоте, то целесообразнее провести изложение вопроса в более серьезном освещении при прохождении курса стереометрии, куда можно перенести и повторение с более углубленным изложением вопроса об измерении длины окружности и площади круга.

Приступая к проработке вопроса о длине окружности по стабильному учебнику, следует разъяснить учащимся, что непосредственно нельзя измерить длину окружности линейной мерой, так как отрезок прямой не может быть совмещен с кривой линией. Как же измерить длину окружности? Разъясняется, что длину окружности находят косвенным путем, вычисляя периметры вписанных и описанных многоугольников с большим числом сторон.

Строят окружность произвольного радиуса, вписывают в нее правильный n-угольник, положим шестиугольник, а затем последовательно удваивают число сторон каждого из получаемых многоугольников. Следует доказать, что по мере удвоения числа сторон правильного вписанного многоугольника его периметр в о з р а с т а е т, все более и более приближаясь к длине окружности, но все же оставаясь м е н ь ш е ее.

Последнее интуитивно воспринимается учащимися, однако это должно быть обосновано логическим доказательством.

Указывается, что сторона правильного вписанного n-угольника $a_n = AB$ как хорда (рис. 436) меньше стягиваемой ею дуги AB, так как, согласно аксиоме, отрезок прямой короче всякой другой линии, проходящей через концы отрезка, а потому $AB < \smile AB$.

Но в правильном вписанном n-угольнике n сторон, а потому, умножив обе части неравенства на n, имеем:

$$AB \cdot n < \smile AB \cdot n \quad \text{или} \quad p_n < C,$$

где p_n — периметр правильного вписанного n-угольника, а C — длина окружности.

Итак, **периметр правильного вписанного n-угольника меньше длины окружности и приближается к ней по мере удвоения числа сторон n-угольника.**

Затем указывается, что: **периметр правильного описанного n-угольника больше длины окружности и приближается к ней по мере удвоения числа его сторон.**

Следует предварительно указать, что *выпуклая объемлемая ломаная короче всякой объемлющей ломаной, концы которой совпадают с кон-*

цами объемлемой, пояснив, что это справедливо и для того случая, когда объемлющая является окружностью.

Такой разбор позволяет подойти к понятию о постоянной и переменной величинах.

Даются определения: 1) *величина, которая в условиях данной задачи все время сохраняет свое значение, называется постоянной величиной*;

2) *величина, которая в условиях данной задачи все время принимает различные значения, называется переменной величиной.*

Длина окружности C служит примером постоянной величины, периметры p_n в P_n правильных вписанных и описанных многоугольников при неограниченном удвоении числа их сторон служат примером переменных величин.

Следует рассмотреть с учащимися возможно большее число примеров постоянных и переменных величин в условиях одной и той же задачи. Число примеров, приведенных в учебнике, следует увеличить.

Примеры. 1) В треугольнике ABC вершина C движется вдоль его высоты CD по направлению к основанию AB и доходит до точки D основания. Объяснить, какими величинами — постоянными или переменными — являются: а) боковые стороны CA и CB треугольника, б) его основание AB, в) его периметр, г) каждый из углов треугольника, д) сумма всех его углов, е) его высоты, ж) его медианы, з) его биссектрисы, и) площадь треугольника.

2) Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC вращается вокруг вершины B. Объяснить, какими величинами — постоянными или переменными — являются: а) катеты и гипотенуза треугольника, б) углы треугольника, в) его периметр, г) его площадь.

3) К окружности с центром в точке O из внешней точки A проведены две касательные AM и AN. Точка A перемещается вдоль прямой AO до точки встречи в точке P окружности. Объяснить, какими величинами — постоянными или переменными — являются: а) касательные AM и AN, б) отрезок AO, в) угол, образуемый касательными AM и AN, г) дуги MP и NP, д) площади треугольников OAM и OAN.

Когда учащиеся четко уяснили себе, какие величины считаются постоянными и переменными в условиях одной и той же задачи, возможно перейти к разъяснению понятия предела переменной величины и величины переменной бесконечно малой. Эти понятия должны быть иллюстрированы целым рядом примеров, после чего поясняется, что окружность служит пределом периметров вписанных и описанных правильных многоугольников при неограниченном удвоении числа их сторон.

Дается следующее определение: *за длину окружности принимается тот предел, к которому стремится периметр правильного вписанного или описанного многоугольника при неограниченном удвоении числа его сторон.*

Необходимо показать учащимся, как, пользуясь формулами удвоения числа сторон правильного вписанного или описанного n-угольника, вычисляют периметры вписанного или описанного n-угольника.

Подробно следует остановиться на разборе таблицы периметров, приведенной в стабильном учебнике (стр. 159), и на выяснении понятия о числе π. Желательно дать соответствующую историческую справку

о числе π и о попытках решить задачу о спрямлении окружности. Умение пользоваться формулой $C=2\pi R$ или $C=\pi D$, где D — диаметр окружности, следует закрепить решением ряда задач. Примеры задач даны в стабильном учебнике.

Переходя к вычислению площади круга, поясняется, что площадь круга есть предел площадей правильных вписанных и описанных n-угольников при неограниченном удвоении числа их сторон.

Получаются формулы $K=\pi R^2$ и $K=\frac{1}{4}\pi D^2$.

Задачи. 1. Стороны прямоугольного треугольника $2a$, $2b$, $2c$ служат диаметрами кругов. Площадь круга, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей кругов, построенных на катетах. Доказать.

Доказательство. По теореме Пифагора имеем:

$$(2a)^2+(2b)^2=(2c)^2 \quad \text{или} \quad 4a^2+4b^2=4c^2.$$

Принимая во внимание, что площадь круга $K=\frac{\pi D^2}{4}$, умножим обе части равенства на $\frac{\pi}{4}$, получим:

$$4a^2\frac{\pi}{4}+4b^2\frac{\pi}{4}=4c^2\frac{\pi}{4},$$

или, после сокращения:

$$\pi a^2+\pi b^2=\pi c^2.$$

2. Доказать, что площадь кольца равна $\pi(R+r)(R-r)$, где R и r — внешний и внутренний радиусы.

Доказательство. Площадь Q кольца равна $\pi R^2-\pi r^2$, $Q=\pi R^2-\pi r^2$, откуда $Q=\pi(R^2-r^2)=\pi(R+r)(R-r)$.

Числовой пример: $R=8{,}8$ и $r=3{,}2$.

$$Q=\pi(8{,}8+3{,}2)\cdot(8{,}8-3{,}2)=\pi\cdot 12\cdot 5{,}6=67{,}2\pi \text{ кв. ед.}$$

§ 22. Приближенные вычисления, связанные с длиной окружности и площадью круга.

Приближенное вычисление π с помощью радикалов.

1. Можно обратить внимание учащихся на то, что сумма чисел $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ дает значение числа π с точностью до 0,01. Действительно,

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 1{,}41+1{,}73=3{,}14\approx\pi.$$

Этим соотношением можно иногда пользоваться для выполнения тех или иных преобразований.

Заметим еще, что деление на число π можно заменить умножением на обратную величину π, т. е. на $\frac{1}{\pi}\approx 0{,}318\approx 0{,}32$, что значительно упрощает вычисления.

Приближенное спрямление окружности и приближенная квадратура круга.

2. Необходимо уделить время для показа учащимся приближенного „спрямления“ окружности и приближенной квадратуры круга.

Уже самые ранние по времени приближенные построения сводились к тому, чтобы по возможности точнее решить проблему; однако эти построения не были снабжены необходимыми указаниями, которые обосновывали бы сделанные построения и давали бы к ним руководящие пояснения.

Ниже приводится построение отрезка, приближенно равного длине окружности, данное Коханским (1685 г.). Оно выполняется в таком порядке:

1) проводят окружность с центром в точке O диаметра AB (рис. 438) и касательную через точку B к окружности O;

2) засекают радиусом, равным R, из точки B как из центра окружность в точке B_1; тогда $\smile BB_1 = 60°$;

3) строят биссектрису угла BOB_1 и продолжают ее до пересечения с касательной в точке K;

4) откладывают от точки K отрезок KC, равный $3R$; наконец,

5) соединяют точку C с точкою A, и тогда отрезок CA приближенно равен половине длины окружности O.

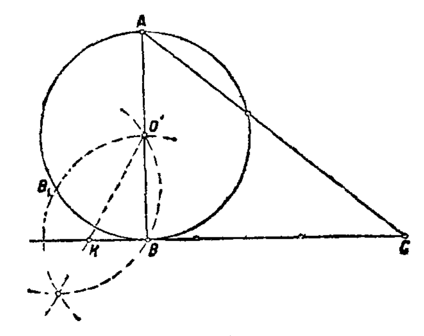


Рис. 438.

Примечание. При решении следует соблюдать экономию в построении линий; так, надо использовать окружность, проведенную радиусом $BB_1 = R$, и для построения биссектрисы. Таким образом, все окружности проведены одним и тем же радиусом.

Покажем, что указанное построение действительно дает хорошее приближение длины окружности:

$$AC = \sqrt{BC^2 + 4}, \text{ если } R = 1,$$

и тогда

$$AB = 2;\ BC = 3R - KB = 3 - x.$$

Из треугольника BOK имеем: $KB = x$ и $OK = 2x$, ибо $\angle BOK = 30°$; значит, $4x^2 - x^2 = 1$ и $3x^2 = 1$, откуда $x^2 = \frac{1}{3}$ и $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Таким образом,

$$BC = 3 - \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ и } AC = \sqrt{\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4},$$

или

$$AC = \sqrt{9 + \frac{1}{3} - 2\sqrt{3} + 4} =$$

$$= \sqrt{13\frac{1}{3} - 2\sqrt{3}} \approx \sqrt{13{,}3333333 - 3{,}4641016} =$$

$$= \sqrt{9{,}8692317} \approx 3{,}141533,$$

т. е. вычислением мы нашли, что длина отрезка равна 3,141533 радиуса; первые пять знаков (3,1415) результата, полученного вычислением на основе приближенного построения, совпадают с первыми пятью знаками действительного значения числа π.

Полезно указать учащимся, что при $R = 1$ *м* выпрямленная таким построением длина полуокружности отличается от действительной ее длины не более чем на 0 1 *мм*.

Чтобы выполнить приближенную квадратуру круга, надо на приближенно выпрямленной окружности построить прямоугольник с высотой, равной половине радиуса, и образовавшийся прямоугольник превратить в равновеликий квадрат.

Надо заметить, что вопрос о квадратуре круга еще и потому так заинтересовал многих, что удается решить квадратуру некоторых криволинейных фигур, ограниченных дугами окружности.

Рассмотрим известную задачу о „гиппократовых луночках". Если $2a$, $2b$ и $2c$ (рис. 439) — стороны прямоугольного треугольника и $a<b<c$, то площади кругов, диаметрами которых служат эти стороны, будут:

$$\pi a^2, \ \pi b^2 \quad \text{и} \quad \pi c^2.$$

Но $\pi a^2+\pi b^2=\pi(a^2+b^2)=\pi c^2$, так как $a^2+b^2=c^2$, и мы получаем формулу Пифагора для кругов, диаметры которых — стороны данного прямоугольного треугольника.

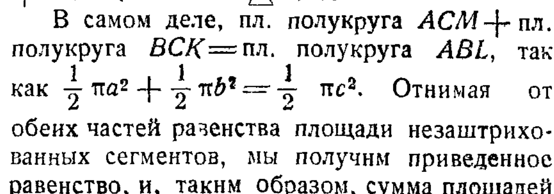


Рис. 439.

Отсюда можно вывести, что и пл. $ALCM+$ + пл. $BKCN=$ пл. $\triangle ABC$.

В самом деле, пл. полукруга $ACM+$ пл. полукруга $BCK=$ пл. полукруга ABL, так как $\frac{1}{2}\pi a^2+\frac{1}{2}\pi b^2=\frac{1}{2}\pi c^2$. Отнимая от обеих частей равенства площади незаштрихованных сегментов, мы получим приведенное равенство, и, таким образом, сумма площадей двух криволинейных фигур, ограниченных дугами окружностей, равна площади прямолинейной фигуры — треугольника.

Приближенное вычисление площади правильного n-угольника.

3. Если задана сторона a_n правильного вписанного n-угольника, то для вычисления его площади можно итти несколькими путями:

1) приемом тригонометрии

$$S_n=\frac{n\cdot R^2\cdot\sin\frac{360^\circ}{n}}{2};$$

2) приемом алгебры, используя формулы последовательного удвоения числа сторон n-угольника;

3) приемом, указанным ниже.

Примем радиус окружности R равным 1. Площадь описанного правильного многоугольника

$$S_{on}=P_{on}\cdot\frac{1}{2}R,$$

но

$$S_{on}:S_{вn}=P_{on}^2:P_{вn}^2, \quad \text{а} \quad S_{on}=P_{on}\cdot\frac{1}{2}R=\frac{1}{2}P_{on} \ (\text{при } R=1),$$

и поэтому

$$S_{вn}=\left(\frac{1}{2}P_{on}\cdot P_{вn}^2\right):P_{on}^2 \quad \text{или} \quad S_{вn}=\frac{1}{2}\cdot\frac{P_{вn}^2}{P_{on}}.$$

Из таблицы на стр. 159 стабильного учебника находим, что для $n=768$ $P_{вn}=2\cdot 3{,}14158$ и $P_{on}=2\cdot 3{,}14161$:

$$S_{вn}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\cdot 3{,}14158^2}{2\cdot 3{,}14161}=\frac{3{,}14158^2}{3{,}14161}=\frac{(3{,}14161-0{,}00003)^2}{3{,}14161}$$

или
$$S_{вп}=\frac{3{,}14161^2-2\cdot 3{,}14161\cdot 0{,}00003+0{,}00003^2}{3{,}14161}.$$

Последний член в числителе имеет первую значащую цифру только на 9-м месте после запятой, а потому этот член может быть опущен. Значит, можно написать, что

$$S_{вп}\approx 3{,}14161-0{,}00006 \text{ или } S_{вп}\approx 3{,}14155 \text{ при } R=1.$$

Сравнивая эти приемы, можно отметить, что самым простым является прием тригонометрический, однако если не пользоваться трансцендентными функциями, то третий прием является проще второго.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

Задачи, отмеченные звездочкой, решаются устно.

1 *. Чем отличается симметрия круга от симметрии дуги?

2 *. Дан полукруг со своим диаметром $2R$. Найти длину ограничивающей его смешанной линии при $R=1$.

3. Найти длину окружности, если известно, что она больше своего диаметра на m единиц.

4 *. Как относятся длины окружностей, описанных вокруг двух подобных многоугольников?

5 *. Отрезок AB концами своими опирается на стороны прямого угла (рис. 440) и скользит по этим сторонам так, что концы его все время остаются на сторонах угла. Какую линию опишет середина O отрезка AB?

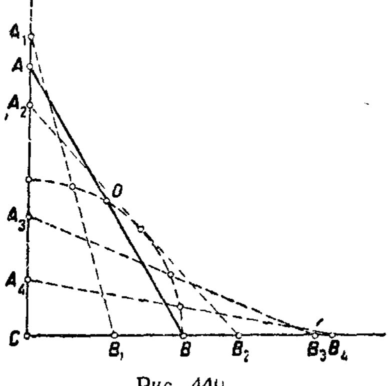


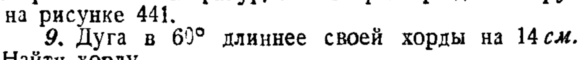
Рис. 440.

6. Длина окружности одного круга равна 1 *м*, длина окружности другого круга равна 40 000 *км* (приближенная длина меридиана земли). Длину окружности каждого из них увеличили на 1 *км* и образовали два новых круга, концентрических с данными. Насколько увеличился радиус каждой из окружностей?

7. Диаметр окружности равен 10 *м*; он разделен на 5 (n) равных частей, и на нем построены полуокружности, как показано на рисунке 441. Вычислить длину контура каждой из частей, на которые круг разделен этими полуокружностями.

На чертеже три части полукруга заштрихованы, две — не заштрихованы.

8. Определить площади криволинейных фигур, на которые разделен круг на рисунке 441.



9. Дуга в 60° длиннее своей хорды на 14 *см*. Найти хорду.

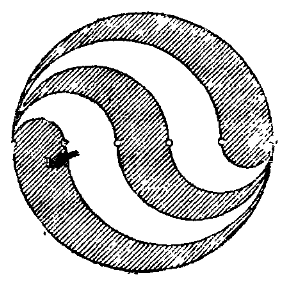


Рис. 441.

10. Диаметр $2R$ окружности разделен на n равных частей, и на каждой из них как на диаметре построена окружность. Чему равна сумма длин этих окружностей?

11 *. Площадь круга равна π квадратным единицам. Найти длину окружности.

12. Площадь кольца равна средней окружности его, умноженной на ширину кольца. Доказать.

13. Дан круг радиуса R. Определить радиусы концентрических окружностей, которыми площадь круга делится на n равных частей.

14. Дано кольцо, радиусы которого равны R и r. Построить круг, равновеликий данному кольцу.

15. Даны две концентрические окружности. Хорда большей из них касается меньшей и равна $2a$. Определить площадь кольца.

16. Радиус полукруга $R = 1$. Дуга его разделена на 3 равные части и точки деления соединены с одним из концов диаметра. Определить площадь каждой из полученных трех частей полукруга.

17. На каждой стороне a квадрата построен полукруг снаружи (рис. 442; проведена окружность, проходящая через все вершины. Вычислить сумму площадей заштрихованных луночек.

18. Окружность радиуса R разделена на 12 равных дуг, и хорды, стягивающие эти дуги, служат диаметрами полуокружностей, расположенных поочередно внутри и вне данной окружности (рис. 443). Вычислить площадь фигуры, ограниченной полученной кривой линией.

19. Вычислить площадь сегмента круга радиуса R, если известно, что дуга сегмента равна 120°.

20. Как относятся площади двух секторов двух кругов, если известно, что центральные углы их равны?

21. Правильные треугольник, четырехугольник, шестиугольник и круг изопериметричны. Площадь которого из них — наибольшая?

22. Правильные треугольник, четырехугольник, шестиугольник и круг равновелики. Периметр которого из них наименьший?

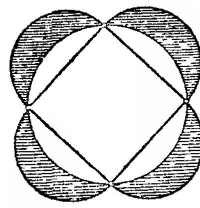


Рис. 442.

Рис. 443.

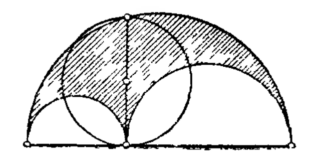


Рис. 444.

23. На рисунке 444 заштрихованная фигура ограничена тремя полуокружностями; сумма диаметров смежных полуокружностей равна диаметру большей полуокружности. Фигура эта равновелика кругу, диаметр которого есть перпендикуляр, проведенный к диаметру большей полуокружности в точке касания меньших полуокружностей (фигура эта называется „арбелон“ Архимеда). Доказать.

24. Две неравные полуокружности с общим центром O лежат по разные стороны диаметра AB (рис. 445). На выступающих частях диаметра большей полуокружности построены по одну сторону с ней две полуокружности. Заштрихованная фигура („саликон“ Архимеда) и круг диаметра CD — равновелики. Доказать.

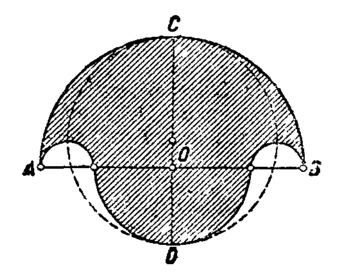


Рис. 445.

Решение приведенных вопросов и задач следует предварить вычислением длины окружности и площади круга по таблицам, например таблицам Брадиса. Эти же таблицы следует использовать для решения обратной задачи: по данным C и K определить диаметр или радиус окружности и круга.

Указания к контрольным вопросам.

1. Круг имеет бесчисленное множество осей симметрии — диаметров — и один центр симметрии; дуга же имеет только одну ось симметрии, проходящую через центр дуги и ее середину, центра же симметрии у дуги нет.

2. Смешанная линия состоит из полуокружности и диаметра; длина ее равна $\pi R + 2R = R(\pi + 2)$; для $R = 1$ имеем $R(\pi + 2) \approx 5{,}14$.

3. Длину окружности мы будем знать, если известен ее радиус. Пусть он равен R. Тогда, согласно условию, $2\pi R = 2R + m$, откуда

$$R = \frac{m}{2(\pi - 1)} \text{ и } C = 2\pi \cdot \frac{m}{2(\pi - 1)} = \frac{\pi m}{\pi - 1} = \frac{\pi}{\pi - 1}\, m =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{\pi}} \cdot m \approx \frac{1}{1 - 0{,}32} \cdot m = \frac{100}{68}\, m = \frac{25}{17}\, m \approx 1{,}5\, m.$$

4. Они относятся, как сходственные стороны или как периметры этих многоугольников.

5. Соединяя C с O, мы видим, что CO — медиана треугольника, равная, как известно, половине гипотенузы AB. При любом указанном в задаче положении AB расстояние $CO=\frac{AB}{2}$ не изменится, ибо AB не меняется, а потому точка O опишет дугу окружности радиуса CO. Точка O опишет четверть окружности.

6. Решим эту задачу в общем виде. Предполагая, что радиус одной окружности равен R метрам, радиус другой равен r метрам, находим что длина C_1 первой окружности равна $2\pi R$, а длина C_2 второй — равна $2\pi r$. Если увеличить первую из них на m метров и вторую — на m метров, то соответственно длина каждой из окружностей будет $2\pi R+m$ и $2\pi r+m$.

Допустим, что радиус первой окружности, полученной при увеличении ее на m метров, равен x, а радиус второй окружности, увеличенной на m метров, равен y, тогда

$$1)\ 2\pi R+m=2\pi x \quad \text{и} \quad 2)\ 2\pi r+m=2\pi y,$$

откуда

$$x=R+\frac{m}{2\pi} \quad \text{и} \quad y=r+\frac{m}{2\pi}.$$

Полученный результат показывает, что радиус каждой окружности увеличится независимо от длины радиуса первоначальной окружности на одно и то же число $\frac{m}{2\pi}$. В данном случае оба радиуса увеличиваются на $\frac{m}{2\pi}=\frac{1000}{2\pi}\approx 1000\cdot 0{,}159=$ $=159$ *м*.

Вопрос данной задачи обычно вызывает у учащихся необдуманный ответ; они полагают, что радиус меньшей окружности увеличивается на бо́льшую величину, нежели радиус большей окружности, и немало удивлены, когда вычисления дают совершенно иной ответ. Подобного рода задачи, поставленные время от времени учащимся, всегда приковывают их внимание; такие вопросы следует ставить всякий раз, когда наблюдается некоторое понижение внимания учащихся.

Задачу можно дать и в такой, например, описательной форме.

Представьте себе, что вокруг земли по экватору протянули веревку, вплотную прилегающую к земле, и она оказалась на 10 *м* длиннее, чем экватор.

Предположим, что вся веревка расположена по окружности, концентрической с экватором. Может ли между так расположенной веревкой и землей проползти мышь? Обычно учащиеся отвечают, что это невозможно, и весьма удивлены, когда, произведя вычисления, они находят, что веревка отстоит от экватора на $\frac{10}{2\pi}\approx 1{,}6$ *м* и, таким образом, под ней может пройти человек среднего роста.

Теперь учащимся будет понятно и следующее: окружность ворота рубашки обычно измеряется в сантиметрах, и число сантиметров называется номером ворота. Если взять рубашку номером больше, т. е. увеличить окружность только на 1 *см*, то ворот будет отстоять от шеи на $\frac{1}{2\pi}\approx 0{,}2$ *см*, или 2 *мм*, а при увеличении на 5 номеров ворот будет отстоять от шеи уже на целый сантиметр.

7. Вычисляя контур верхней заштрихованной части круга, мы видим, что контур ее состоит из полуокружности радиуса 5 *м*, полуокружности радиуса 4 *м* и полуокружности радиуса 1 *м*; следовательно, весь контур равен $5\pi+4\pi+$ $+\pi=10\pi$, т. е. длине всей окружности. То же самое получится, если вычислять контуры остальных частей круга. Итак, весь круг делится на 5 частей, контуры которых равны каждой длине всей окружности.

8. Площади этих частей равны. В самом деле, площадь первой верхней части (заштрихованной) равна

$$\frac{\pi\cdot 5^2-\pi\cdot 4^2+\pi\cdot 1^2}{2}=5\pi\ м^2.$$

Площадь же K всего круга равна $\pi\cdot 5^2=25\pi$ *м*², и, следовательно, площадь фигуры составляет пятую часть площади всего круга. Площадь второй части (незаштрихованной) также равна

$$\frac{1}{2}(\pi\cdot 4^2-\pi\cdot 3^2+\pi\cdot 2^2-\pi\cdot 1^2)=5\pi\ м^2,$$

и площадь средней части (заштрихованной) равна

$$\frac{1}{2}(\pi\cdot3^2-\pi\cdot2^2+\pi\cdot3^2-\pi\cdot2^2)=5\pi\ м^2.$$

Следовательно:

1) площадь круга указанным способом разделена на 5 равновеликих частей.

2) все эти части имеют равные контуры.

Итак, сумма площадей всех пяти частей равна площади всего круга, сумма же контуров всех пяти частей в 5 раз больше окружности круга.

Следует учащимся предложить решить эту задачу в общем виде, полагая диаметр равным a метрам, а число частей — равным n.

9. Хорда, стягивающая дугу в 60°, равна радиусу R; дуга же в 60° составляет $\frac{60}{360}=\frac{1}{6}$ длины окружности, т. е. она равна $\frac{2\pi R}{6}=\frac{\pi R}{3}$. По условию $\frac{\pi R}{3}-R=14$, откуда

$$R=\frac{42}{\pi-3}\approx\frac{42}{3\frac{1}{7}-3}=42\cdot7=294\ см.$$

10. Диаметр каждой из окружностей равен $\frac{2R}{n}$ и длина каждой из них равна $\frac{\pi 2R}{n}$, следовательно сумма длин всех окружностей равна $\frac{2\pi R}{n}n=2\pi R$, т. е. длине всей окружности.

Если допустить, что диаметр разделен на бесконечно большое число частей и на них как на диаметрах построены окружности, то решение задачи от этого

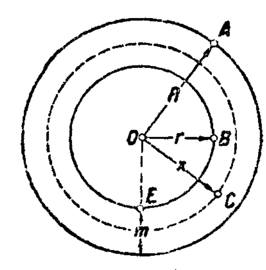
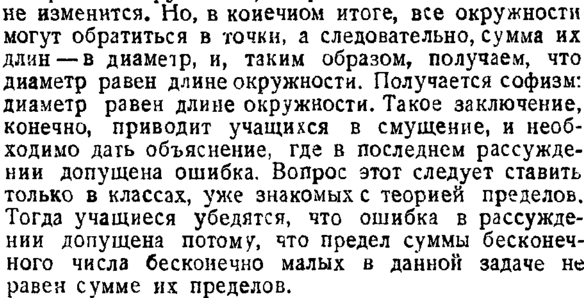
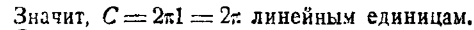


Рис. 445.


не изменится. Но, в конечном итоге, все окружности могут обратиться в точки, а следовательно, сумма их длин — в диаметр, и, таким образом, получаем, что диаметр равен длине окружности. Получается софизм: диаметр равен длине окружности. Такое заключение, конечно, приводит учащихся в смущение, и необходимо дать объяснение, где в последнем рассуждении допущена ошибка. Вопрос этот следует ставить только в классах, уже знакомых с теорией пределов. Тогда учащиеся убедятся, что ошибка в рассуждении допущена потому, что предел суммы бесконечного числа бесконечно малых в данной задаче не равен сумме их пределов.

11. Длина C окружности равна $2\pi R$; значит, для вычисления C надо знать R. Согласно условию,


$$\pi R^2=\pi \text{ и } R^2=1, \text{ или } R=1.$$

Значит, $C=2\pi 1=2\pi$ линейным единицам.

Следует обратить внимание учащихся на размерность в обоих случаях.

12. Цель решения этой задачи — показать аналогию между вычислением площади прямолинейной фигуры (трапеции) и криволинейной фигуры (кольца).

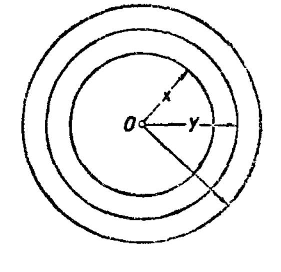


Рис. 447.

Пусть R — радиус внешней окружности и r — радиус внутренней окружности кольца (рис. 446), m — ширина кольца и x — радиус средней окружности кольца. Тогда площадь кольца равна

$$\pi R^2-\pi r^2=\pi(R^2-r^2)=\pi(R+r)(R-r).$$

Но $R-r=m$; кроме того $R=x+\frac{m}{2}$ и $r=x-\frac{m}{2}$, а потому $R+r=x+\frac{m}{2}+x-\frac{m}{2}=2x$, и площадь кольца равна $\pi 2xm=2\pi xm$.

Формула эта напоминает собою формулу для площади трапеции: площадь трапеции равна произведению средней линии на высоту, а площадь кольца равна произведению длины средней окружности и ширины кольца.

13. Целесообразно сперва решить задачу для какого-либо конкретного случая, например для $n=3$. Обозначив радиус внутренней окружности через x (рис. 447), второй — через y, имеем:

$$\pi x^2 = \frac{1}{3}\pi R^2 \quad \text{и} \quad \pi(y^2 - x^2) = \frac{1}{3}\pi R^2,$$

откуда

$$x^2 = \frac{1}{3}R^2, \quad y^2 = \frac{1}{3}R^2 + x^2 = \frac{1}{3}R^2 + \frac{1}{3}R^2 = \frac{2}{3}R^2$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{3}R^2} = \frac{R\sqrt{3}}{3}, \quad y = \sqrt{\frac{2}{3}R^2} = \frac{R\sqrt{6}}{3}.$$

Так же решается затем задача для n:

$$x_1 = R\sqrt{\frac{1}{n}}; \quad x_2 = R\sqrt{\frac{2}{n}}; \quad x_3 = R\sqrt{\frac{3}{n}}; \ldots; x_{n-1} = R\sqrt{\frac{n-1}{n}}.$$

Решив задачу вычислением, можно затем поставить вопрос о делении круга концентрическими окружностями на n равных частей построением.

В самом деле,

$$x_1 = R\sqrt{\frac{1}{n}} = \sqrt{\frac{R}{n}\cdot R},$$

$$x_2 = R\sqrt{\frac{2}{n}} = \sqrt{\frac{2R}{n}\cdot R},$$

$$x_3 = R\sqrt{\frac{3}{n}} = \sqrt{\frac{3R}{n}\cdot R},$$

. . . .,

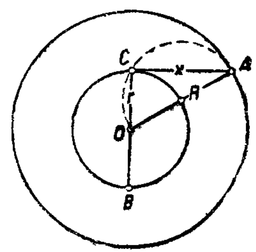


Рис. 448.

т. е. каждый из искомых радиусов может быть построен как средняя пропорциональная двух отрезков: 1) $\frac{R}{n}$ и R, 2) $\frac{2R}{n}$ и R, и т. д.

14. Если x — радиус круга, равновеликого кольцу (рис. 448), то

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi x^2 \quad \text{или} \quad R^2 - r^2 = x^2.$$

Итак, x — катет прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна R, а другой катет равен r.

Построив на радиусе R (внешней окружности) полуокружность, соединяем точку пересечения C этой полуокружности и внутренней окружности кольца с концом A радиуса R, лежащим на внешней окружности, получаем $AC = x$. В самом деле, $x^2 = R^2 - r^2$, ибо треугольник OAC — прямоугольный.

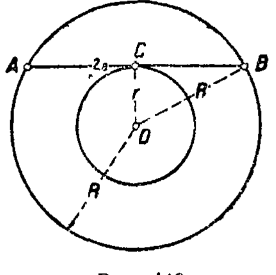


Рис. 449.

15. Площадь кольца равна $\pi(R^2 - r^2)$. Из прямоугольного треугольника OCB (рис. 449) находим, что $R^2 - r^2 = a^2$, а потому площадь кольца равна πa^2.

Хорошо подчеркнуть, что определять радиусы кольца нет никакой нужды, и часто случается, что определить каждый из линейных элементов в отдельности не удается; это, однако, не должно приостанавливать решения вопроса, и в таком случае следует искать определенную зависимость между элементами.

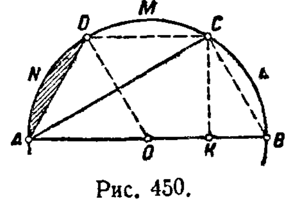


Рис. 450.

Надо также проверить данное решение при $2a = 2R$, тогда $r = 0$; в этом случае кольцо обращается в круг — кольцо, радиус которого $r = 0$; площадь равна πR^2.

Небезынтересно после этого решить следующую задачу на построение: построить кольцо, площадь которого равна πa^2.

В произвольном круге проводим хорду длиною в a и радиусом, равным расстоянию хорды от центра, проводим концентрическую окружность. Кольцо между первой окружностью и построенной и будет искомым кольцом, площадь которого равна πa^2.

Ясно, что это задача неопределенная и допускает бесчисленное множество решений при одном только условии, чтобы $2a \leqq 2R$. Она становится определенной, когда R дано.

16. Площадь сегмента AND (рис. 450) есть разность площадей сектора $OAND$ и треугольника OAD.

Следовательно,

$$\text{пл. } AND = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12} R^2 \approx \frac{6,28 - 5,20}{12} R^2 =$$
$$= \frac{1,08}{12} R^2 = 0,09\ R^2 \text{ (кв. ед.)}.$$

$$\text{Пл. } ADMCA = \text{пл.} \triangle ADC + \text{пл. } DMC \approx \frac{DC \cdot CK}{2} + 0,09\ R^2 =$$
$$= \frac{R \cdot R\sqrt{3}}{2 \cdot 2} + 0,09\ R^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + 0,09\right) R^2 \approx (0,43 + 0,09)\ R^2 = 0,52\ R^2 \text{ (кв. ед.)}.$$

Площадь третьей части можно было бы найти как разность между площадью полукруга и суммой площадей найденных частей. Однако лучше найти отдельно третью часть и затем, взяв сумму площадей всех трех частей, проверить правильность решения; их сумма должна равняться площади полукруга:

$$\text{пл. } ACLBA = \text{пл. } \triangle ACB + \text{пл. } CLB \approx \frac{AC \cdot CB}{2} + 0,09\ R^2 =$$
$$= \frac{R\sqrt{3} \cdot R}{2} + 0,09\ R^2 \approx (0,87 + 0,09)\ R^2 = 0,96\ R^2 \text{ (кв. ед.)}.$$

Проверка:

$$\text{Площадь полукруга} = \frac{\pi R^2}{2} = 1,57\ R^2 \text{ (кв. ед.)}$$

$$(0,09 + 0,52 + 0,96)\ R^2 = 1,57\ R^2 \text{ кв. ед.}$$

17. Площадь каждого из полукругов, построенных на сторонах квадрата, равна $\frac{\pi a^2}{8}$; площадь сегмента круга, описанного около квадрата, равна разности между четвертью площади круга, диаметр которого — диагональ квадрата $a\sqrt{2}$, и четвертью площади квадрата, т. е.:

$$\frac{\pi (a\sqrt{2})^2}{16} - \frac{1}{4} a^2 = \frac{\pi a^2}{8} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{8} (\pi - 2).$$

Следовательно, площадь одной луночки равна

$$\frac{\pi a^2}{8} - \frac{a^2}{8} (\pi - 2) = \frac{a^2}{8} (\pi - \pi + 2) = \frac{2a^2}{8} = \frac{a^2}{4},$$

и сумма площадей всех луночек равна $4 \cdot \frac{a^2}{4} = a^2$, т. е. площади квадрата.

Решение этой задачи вычислением может навести учащихся на мысль о решении данного вопроса приемом, каким была решена задача о гиппократовых луночках. Возможно, что учащиеся, проведя диаметр круга или диагональ квадрата, найдут это решение. Тогда следует решить задачу и этим способом и доказать, что сумма площадей луночек равна площади квадрата, и только после этого проверить ее вычислением.

18. Соединяя точки деления окружности хордами в последовательном порядке, мы получаем правильный вписанный двенадцатиугольник (рис. 443). Сравнивая площадь фигуры, ограниченной кривой линией, с площадью правильного двенадцатиугольника, мы заключаем, что они равны, ибо полукруги, построенные на сторонах многоугольника как на диаметрах, равны, и мы прикладываем к правильному двенадцатиугольнику столько же полукругов (6), сколько от него и отнимаем, чтобы получить криволинейную фигуру. Площадь же правильного двенадцатиугольника, как известно, равна $3R^2$ кв. ед., где R — радиус описанной окружности.

19. Площадь сегмента есть разность между площадями сектора и соответствующего ему треугольника. Площадь сектора равна $\frac{\pi R^2}{3}$, площадь же равнобедренного тупоугольного треугольника со сторонами R и R и углом в 120° между ними (рис. 451) равна $\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$; следовательно, площадь сегмента равна

$$\frac{\pi R^2}{3}-\frac{R^2\sqrt{3}}{4}=\frac{R^2}{12}(4\pi-3\sqrt{3})\approx\frac{R^2}{12}(12{,}57-5{,}20)\approx 0{,}61\,R^2 \text{ (кв. ед.)}.$$

20. Площадь сектора радиуса R и угла α равна $\frac{\pi R^2\alpha}{360}$, площадь же сектора радиуса r и угла α равна $\frac{\pi r^2\alpha}{360}$, и потому площади их относятся, как

$$\frac{\pi R^2\alpha}{360}:\frac{\pi r^2\alpha}{360}=R^2:r^2,$$

т. е. площади таких секторов относятся, как квадраты их радиусов.

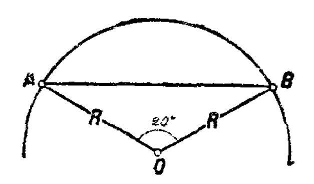


Рис. 451.

21. Пусть $a_6=1$, следовательно периметр шестиугольника $P_6=6$. Но, по условию, $P_3=6$, $P_4=6$, $P_6=6$ и $C=6$, а тогда

$$S_6=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 6=\frac{3\sqrt{3}}{2};\quad S_3=\frac{4\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3};\quad S_4=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}\text{ и } K=\pi\left(\frac{6}{2\pi}\right)^2=\frac{9}{\pi},$$

а потому

$$S_3\approx 1{,}73\text{ кв. ед};\quad S_4=2{,}25\text{ кв. ед.};$$

$$S_6\approx 2{,}60\text{ кв. ед.};\quad K\approx 2{,}87\text{ кв. ед.}$$

Из всех четырех изопериметрических фигур площадь круга — наибольшая.

22. Пусть площадь квадрата равна 1 кв. ед., тогда и сторона его равна 1 лин. ед. и периметр его $P_4=4$ лин. ед.

Площадь треугольника равна $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=1$, откуда $a^2=\frac{4}{\sqrt{3}}$ и $a=\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$, а следовательно $P_3=\frac{6}{\sqrt[4]{3}}=2\sqrt[4]{27}$.

Площадь шестиугольника, сторона которого равна a, равна $\frac{6a_6^2\sqrt{3}}{4}=1$, откуда

$$a_6^2=\frac{2}{3\sqrt{3}}\quad\text{и}\quad a_6=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}}=\sqrt[4]{\frac{4}{27}}=\frac{1}{3}\sqrt[4]{12}\text{ и } P_6=2\sqrt[4]{12}$$

Наконец, площадь круга равна $K=1$ или $\pi R^2=1$, откуда

$$R^2=\frac{1}{\pi}\quad\text{и}\quad R=\sqrt{\frac{1}{\pi}}\quad\text{и}\quad C=2\pi\sqrt{\frac{1}{\pi}}=2\sqrt{\pi}.$$

Итак,

$$C = 2\sqrt{\pi} \approx 2\sqrt{3,14} \approx 2 \cdot 1,77 = 3,54,$$
$$P_6 = 2\sqrt[4]{12} \approx 2\sqrt{3,46} \approx 2 \cdot 1,86 = 3,72;$$
$$P_4 = 4;$$
$$P_3 = 2\sqrt[4]{27} \approx 2\sqrt{5,20} \approx 2 \cdot 2,28 = 4,56.$$

Таким образом, наименьший периметр у круга:

$$C < P_3 < P_4 < P_6.$$

Следует указать, что необходимо всегда пользоваться готовыми приближенными значениями таких чисел, как

$$\frac{1}{\pi} \approx 0,3183 \approx 0,32; \qquad \sqrt{\pi} \approx 1,7725;$$
$$\frac{1}{\pi^2} \approx 0,1013; \qquad \pi^2 \approx 9,8696,$$
$$\frac{1}{\pi^3} \approx 0,03225;$$

а также таблицами квадратных корней из чисел.

23. Арбелон в переводе значит секирка. Пусть диаметры меньших полукругов a и b, тогда площадь заштрихованной фигуры равна:

$$\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\pi(a+b)^2}{4} - \frac{\pi a^2}{4} - \frac{\pi b^2}{4}\right] = \frac{\pi}{8}(a^2 + b^2 + 2ab - a^2 - b^2) = \frac{\pi ab}{4}.$$

Перпендикуляр $x = \sqrt{ab}$, а потому площадь круга, диаметром которого служит x, равна

$$\frac{\pi x^2}{4} = \frac{\pi(\sqrt{ab})^2}{4} = \frac{\pi ab}{4}.$$

24. Обозначив диаметры крайних малых полукругов через a, а диаметр среднего — через $2b$, находим площадь заштрихованной фигуры:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\pi(2a+2b)^2}{4} - 2 \cdot \frac{\pi a^2}{4} + \frac{\pi(2b)^2}{4}\right] = \frac{\pi}{8}(4a^2 + 4b^2 + 8ab - 2a^2 + 4b^2) =$$
$$= \frac{\pi}{8}(2a^2 + 8b^2 + 8ab) = \frac{\pi}{4}(a^2 + 4b^2 + 4ab) = \frac{\pi}{4}(a+2b)^2.$$

Площадь же круга, диаметр которого

$$CD = a + b + b = a + 2b,$$

равна $\frac{\pi(a+2b)^2}{4}$. Значит, площадь саликона (в переводе — лопатка) равна площади круга.

Обе последние задачи приписывают Архимеду.

Площади фигур, ограниченных любым контуром.

1. Желательно показать учащимся вычисление площадей фигур, ограниченных любым контуром. При недостатке времени следует вопрос рассмотреть в кружке.

Пусть на миллиметровой бумаге нанесен контур, ограничивающий фигуру, площадь которой надо определить. Подсчет целых квадратных сантиметров внутри контура дает, допустим, a кв. сантиметров; подсчет оставшихся квадратных миллиметров дает b кв. миллиметров; наконец, подсчитаем еще те кв. миллиметры, которые пересекаются контуром, и берем половину их числа;

пусть их c, тогда площадь фигуры, ограниченной этим контуром, содержит приближенно $\left(100a + b + \frac{c}{2}\right)$ $мм^2$. Само собою разумеется, что полученное таким образом число отнюдь не является точным; при тщательном подсчете оно практически достаточно верно, хотя самый подсчет и отнимает немало времени.

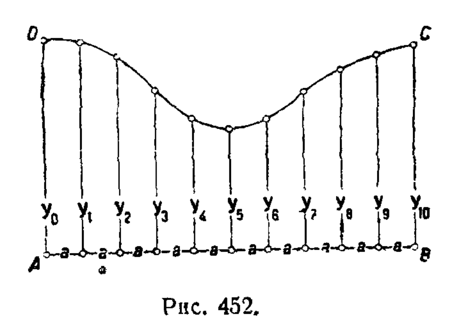


Рис. 452.

2. Обычно на практике пользуются другим приемом, а именно **формулой трапеций**.

а) Пусть требуется вычислить площадь фигуры $ABCD$, ограниченной прямою AB, двумя перпендикулярными к ней прямыми в концах ее — AD и BC и кривой CD (рис. 452).

Делят AB на 10 равных частей и обозначают каждую из них через a, так что $a = \frac{AB}{10}$. В точках деления проводят перпендикуляры к AB до пересечения с кривой CD. Перпендикуляры эти называются **ординатами** точек кривой по отношению к прямой AB. Рассматривая каждую из полос как прямолинейную трапецию, получают приближенную величину площади S фигуры $ABCD$:

$$S \approx \frac{y_0 + y_1}{2} \cdot a + \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot a + \ldots + \frac{y_9 + y_{10}}{2} \cdot a =$$

$$= \frac{a}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \ldots + 2y_9 + y_{10}).$$

Если $AB = b$, то

$$a = \frac{b}{10}, \text{ и } S \approx \frac{b}{20}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_9 + y_{10}).$$

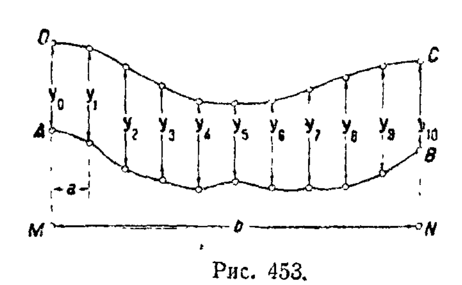


Рис. 453.

Следует обратить внимание на то, что чем больше число делений, тем ближе к действительной величине выражение S площади.

б) Такое же выражение для площади получится, если и AB будет кривой линией (рис. 453), ибо искомую площадь можно рассматривать как разность площадей $MNCD$ и $MNBA$ и тогда после преобразований получают:

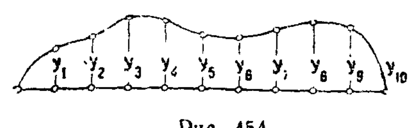


Рис. 454.

$$S \approx \frac{b}{20}[y_0 + y_{10} + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_9)],$$

где y_0, y_1, y_2, ... обозначают разности ординат соответственных точек кривых DC и AB.

в) Если дана площадь, изображенная на рисунке 454, где $y_0 = 0$ и $y_{10} = 0$, то

$$S \approx \frac{b}{10}(y_1 + y_2 + \ldots + y_9).$$

г) Если требуется вычислить площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой линией (рис. 455), то искомая площадь фигуры есть разность площадей *MNBDA* и *MNBCA* и, следовательно,

$$S \approx \frac{b}{10}(y_1 + y_2 + \ldots + y_9).$$

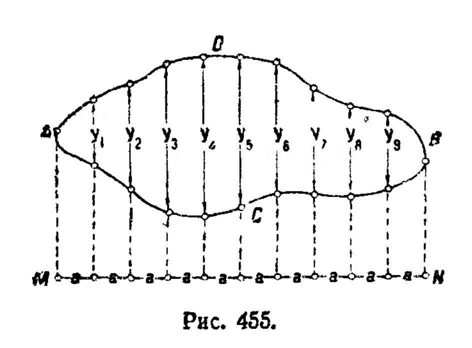


Рис. 455.

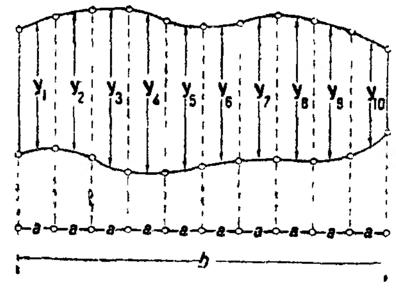


Рис. 456.

д) Если использовать для вычисления площади средние линии „трапеций“ (рис. 456), то

$$S \approx a(y_1 + y_2 + \ldots + y_{10}) = \frac{b}{10}(y_1 + y_2 + \ldots + y_{10}) = b \cdot \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_{10}}{10}.$$

Но $\frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_{10}}{10}$ есть среднее арифметическое ординат, или средняя высота фигуры, и потому, обозначив ее через y_{cp}, получают:

$$S \approx b \cdot y_{cp}.$$

Итак, площадь фигуры, ограниченной любым контуром, приближенно равна произведению средней высоты фигуры и длины фигуры, причем за длину фигуры принимается расстояние между двумя крайними ее ординатами. Это так называемая упрощенная формула трапеций.

Пример. Вычислить площадь фигуры, если известно, что

$b = 80$ *мм*,	$y_0 = 24$ *мм*,	$y_1 = 26$ *мм*,	$y_2 = 28$ *мм*,
$y_3 = 26$ *мм*,	$y_4 = 24$ *мм*,	$y_5 = 21$ *мм*,	$y_6 = 23$ *мм*.
$y_7 = 27$ *мм*,	$y_8 = 30$ *мм*,	$y_9 = 29$ *мм*,	$y_{10} = 24$ *мм*.

Решение по формуле трапеций:

$$S \approx \frac{b}{20}[24 + 24 + 2(26 + 28 + 26 + 24 + 21 + 23 + 27 + 30 + 29)] =$$

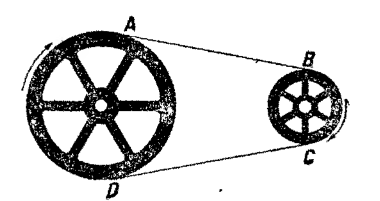
$$= \frac{80}{20}(48 + 2 \cdot 234) = 4 \cdot 516 = 2064 \approx 21 \cdot 10^2 \text{ мм}^2.$$

Если контуры фигур нанесены на миллиметровую бумагу, то облегчается определение длин ординат и тем самым упрощается и вычисление искомой площади.

Литература по вопросам частной методики указана во 2-й части книги (Стереометрия).

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	*Строка*	*Напечатано*	*Должно быть*
3	17 сверху	всегда	все же
37	4 снизу	Maennchеu	Maennchen
53	26 „	32² 40′ 82″	32² 40\` 82\`\`
53	22 „	20² 72′ 83″	20² 72\` 83\`\`
		2072′, 83 = 207283″	2072\`, 83 = 207283\`\`
53	17 „	1′	1\`
53	16 „	1″	1\`\`
70	24 сверху	(УСС)	(УСУ)
79	19 „	*AB*	*AC*
149	27 „	*CD* =	⌣*CKD* =
261	7 снизу	250	254
305	15 сверху	$\lim S_{on}$ $\to \infty$	$\lim\limits_{h \to \infty} S_{on}$
309	1 снизу	01 *мм*	0,1 *мм*
25	Рис. 9	вместо напечатанного на стр. 25.	



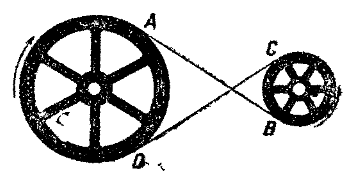


Рис. 9.

Гангнус и Гурвиц. Геометрия. Метод. пособ.